

# **Approximation und Interpolation von Grenzzustandsfunktionen zur Sicherheitsbewertung nichtlinearer Finite-Elemente-Strukturen**

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur

an der Fakultät Bauingenieurwesen  
der Bauhaus-Universität Weimar

vorgelegt von

Dirk Roos  
geboren am 20. August 1969  
in Kühlungsborn

Weimar, 4. Juli 2001

Gutachter:

1. Prof. Dr. techn. Christian Bucher
2. Prof. Dr.-Ing. habil. Rüdiger Rackwitz
3. Prof. Dr.-Ing. habil. Frank Werner

Tag der Disputation: 24. Januar 2002



Diese Arbeit widme ich meinen Eltern Willy und Hertha Gerdel.



# Danksagung

Mein Dank gilt insbesondere Herrn Professor Christian Bucher für die überaus gute fachliche Betreuung und Unterstützung meiner Arbeit. Von unschätzbarem Wert waren mir die vielen Hinweise und Anregungen von Herrn Professor Rüdiger Rackwitz. Nicht zuletzt danke ich beiden für die Übernahme der Gutachten. Ebenso danke ich Herrn Professor Frank Werner für die Übernahme eines weiteren Gutachtens und für die Zusammenarbeit und Hilfe in der Anwendung der Ergebnisse auf praktische Fragestellungen und für das hilfreiche kritische Hinterfragen der Methoden. In diesem Zusammenhang sei auch Herrn Axel Burkhardt gedankt für die Hilfe bei der Analyse des Anwendungsbeispiels. Weiterhin danke ich Herrn Doktor Gernot Pfefferkorn für die vielen fruchtbaren Gespräche rund um die Methoden der Analyse nichtlinearer finiter Elemente. Ohne die hilfsbereite Unterstützung von Herrn Doktor Klaus Markwardt und Herrn Professor Klaus Gürlebeck in der Approximationstheorie hätten einige Teile dieser Arbeit nicht verwirklicht werden können. Herrn Doktor Veit Bayer bin ich sehr dankbar für die umfangreichen Vorarbeiten und weitergegebenen Erfahrungen auf dem Gebiet der Antwortflächenverfahren. Herrn Jörg Riedel danke ich für seine große Hilfsbereitschaft insbesondere in der Computer-technischen Verteilung der umfangreichen Berechnungen. In diesem Zusammenhang gilt mein Dank auch Herrn Gunter Seidel.

Weimar, 6. März 2002

Dirk Roos



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	1
1.2	Verwendete Methoden und Verfahren . . . . .	2
1.3	Entwickelte Verfahren zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Zuverlässigkeitsanalyse</b>	<b>3</b>
2.1	Formulierung der Versagenswahrscheinlichkeit . . . . .	3
2.2	Methode der zweiten Momente erster Ordnung . . . . .	5
2.3	Zuverlässigkeitsverfahren erster und zweiter Ordnung . . . . .	6
2.4	Monte-Carlo-Simulation . . . . .	8
2.5	Importance Sampling . . . . .	9
2.6	Adaptive Sampling . . . . .	11
2.7	Directional Sampling . . . . .	11
2.8	Adaptive Directional Sampling . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Grenzzustände nichtlinearer Strukturen</b>	<b>15</b>
3.1	Einleitung . . . . .	15
3.2	Finite-Elemente-Methode . . . . .	15
3.2.1	Prinzip der virtuellen Verschiebungen . . . . .	15
3.2.2	Finite Elemente in der linearen Strukturmechanik . . . . .	18
3.2.3	Lagrangesche Formulierung der Bewegungsgleichung . . . . .	20
3.2.4	Finite Elemente in der nichtlinearen Strukturmechanik . . . . .	24
3.2.5	Spannungs-Verzerrungs-Materialverhalten . . . . .	27
3.3	Das isoparametrische degenerierte Schalenelement SHELL9N . . . . .	32
3.4	Bestimmung von Grenzzuständen . . . . .	33
3.4.1	Bisektion . . . . .	33
3.4.2	Nichtkonvergenz der Gleichgewichtsiteration . . . . .	34
3.4.3	Singularität der tangentialen Systemsteifigkeitsmatrix . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Approximation und Interpolation von Grenzzustandsfunktionen</b>	<b>37</b>
4.1	Einleitung . . . . .	37

4.2	Approximation der Funktion der Strukturantwort . . . . .	38
4.2.1	Polynomiale Approximation . . . . .	38
4.2.2	Methode der minimalen Fehlerquadrate . . . . .	39
4.2.3	Varianz-Analyse . . . . .	40
4.2.4	Ermittlung der Stützstellen . . . . .	41
4.2.5	Bewertung . . . . .	42
4.3	Polynomiale Interpolation der Grenzzustandsfunktion . . . . .	42
4.4	Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch Hyperebenen . . . . .	43
4.4.1	Normalenflächen . . . . .	43
4.4.2	Simplexe . . . . .	44
4.5	Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit gewichteten Ra- dien . . . . .	47
4.6	Adaptive Approximation und Interpolation . . . . .	50
4.7	Fehlerordnung der Interpolation . . . . .	52
4.8	Fehlerabschätzung durch Simulation . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>55</b>
5.1	Einleitung . . . . .	55
5.2	Versagenswahrscheinlichkeit eines einfachen Rahmens mit zufälli- gen Lasten . . . . .	56
5.2.1	Einleitung . . . . .	56
5.2.2	Mechanisches System und Zufallsgrößen . . . . .	56
5.2.3	Grenzzustand nach der Fließgelenktheorie I. Ordnung . . . . .	59
5.2.4	Grenzzustand der nichtlinearen Finite-Elemente-Analyse . . . . .	61
5.2.5	Interpolation der Grenzzustandsfunktion . . . . .	63
5.3	Plastisches Beulen einer Schalen-Struktur . . . . .	65
5.3.1	Einleitung . . . . .	65
5.3.2	Grenzzustand der nichtlinearen Finite-Elemente-Analyse . . . . .	65
5.3.3	Mechanisches System und Zufallsgrößen . . . . .	65
5.3.4	Interpolation der Grenzzustandsfunktion . . . . .	67
5.4	Nichtlineare Analyse einer Stahlhalle mit mehreren Zufallslasten . . . . .	75
5.4.1	Statisches System . . . . .	75
5.4.2	Modellierung der Einwirkungsunsicherheiten . . . . .	82
5.4.3	Ergebnisse . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Dokumentation des Schalenelementes SHELL9N</b>	<b>99</b>
A.1	Konzept der isoparametrischen Elementformulierung . . . . .	99
A.2	Verzerrungs-Verschiebungs - Transformationsmatrizen . . . . .	101
A.3	Element-Matrizen . . . . .	104
A.4	Basiswechsel und Koordinatentransformation . . . . .	105



<b>B</b>	<b>Dokumentation der SLang-Eingabedateien</b>	<b>109</b>
B.1	Einleitung	109
B.2	Haupt-Eingabedatei ( <b>Main.s</b> )	110
B.2.1	Steuerung des Berechnungsablaufes	110
B.2.2	Definition aller verwendeter Zufallsvariablen	111
B.2.3	Adaptive Richtungssuche der Grenzzustandspunkte	112
B.2.4	Interpolation der Grenzzustandspunkte und Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit	113
B.2.5	Subroutine für die Verteilung der Suche der Grenzzustandspunkte	115
B.2.6	Subroutine zur Definition der veränderlichen Daten im thread file	116
B.2.7	Subroutine zur Zusammenstellung der Grenzzustandspunkte	117
B.3	Definition der Zufallsvariablen ( <b>Shared.s</b> )	118
B.4	Verteilung ( <b>parallel.s</b> )	119
B.5	Informationen über vorhandene hosts und deren Time-Out-Zeiten ( <b>hosts.s</b> )	126
B.6	Vektor der Hosts bzw. Prozessoren die für die Parallelisierung angesprochen werden sollen ( <b>availableHosts.txt</b> )	128
B.7	Berechnung der Grenzzustandspunkte der Schalenstruktur	128
B.7.1	Steuerung des Berechnungsablaufes	128
B.7.2	Schleife über die zu berechnenden Grenzzustandspunkte	130
B.7.3	Inkrementell-iterative Berechnung bis zum Mittelwertvektor der Basisvariablen	137



# Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung der Sicherheit von Strukturen mit sowohl geometrisch als auch physikalisch nichtlinearem Verhalten.

Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit einer Struktur mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationsmethoden erfordert, dass die Funktion der Strukturantwort implizit berechnet wird, zum Beispiel durch nichtlineare Strukturanalysen für jede Realisation der Zufallsvariablen. Die Strukturanalysen bilden jedoch den Hauptanteil am Berechnungsaufwand der Zuverlässigkeitsanalyse, so dass die Analyse von realistischen Strukturen mit nichtlinearem Verhalten durch die begrenzten Computer-Ressourcen stark eingeschränkt ist.

Die klassischen Antwortflächenverfahren approximieren die Funktion der Strukturantwort oder aber die Grenzzustandsfunktion durch Polynome niedriger Ordnung. Dadurch ist für die Auswertung des Versagens-Kriteriums nur noch von Interesse, ob eine Realisation der Basisvariablen innerhalb oder außerhalb des von der Antwortflächenfunktion gebildeten Raumes liegt – die Strukturanalyse kann dann entfallen. Die Versagenswahrscheinlichkeit kann anschließend mittels eines beliebigen Monte-Carlo-Simulationsverfahrens auf der Basis der approximierenden Funktion ermittelt werden.

Bei stark nichtlinearen Grenzzustandsfunktionen versagt die polynomiale Approximation. Durch die Ermittlung der Koeffizienten mittels Regression werden die eigentlich exakt ermittelten Stützstellen nur näherungsweise approximiert. Der dabei entstehende Anpassungsfehler kann unter Umständen das Approximationsergebnis unbrauchbar machen.

Das directional sampling neigt bei Problemen mit vielen Zufallsvariablen zu einem systematischen Fehler, da insbesondere für Grenzzustandsflächen niedrigerer Ordnung als die Anzahl der Zufallsvariablen nur wenige Simulationen auf diesen liegen und somit die Versagenswahrscheinlichkeit durch die Kreissegmentapproximation unterschätzt wird. Das adaptive importance directional sampling dagegen beseitigt diesen Fehler, verschenkt jedoch Informationen über den Verlauf der Grenzzustandsfunktion, da die aufgefundenen Stützstellen aus den vorangegangenen Simulationsläufen nicht berücksichtigt werden können.

Aus diesem Grund erscheint eine Kombination beider Simulationsverfahren und eine Interpolation mittels einer Antwortfläche geeignet, diese Probleme zu lösen. Dies war die Motivation für die Entwicklung eines Verfahrens der adaptiven Simulation der Einheitsvektoren und anschließender Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch eine Antwortflächenfunktion.

Dieses Vorgehen stellt besondere Anforderungen an die Antwortflächen-

funktion. Diese muss flexibel genug sein, um stark nichtlineare Grenzzustandsfunktionen beliebig genau annähern zu können. Außerdem sollte die Anzahl der verarbeitbaren Stützstellen nicht begrenzt sein. Auch ist zu berücksichtigen, dass die Ermittlung der Stützstellen auf der Grenzzustandsfunktion nicht regelmäßig erfolgt. Die in dieser Arbeit entwickelten Methoden der lokalen Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch Normalen-Hyperebenen bzw. sekantialen Hyperebenen und der sowohl lokalen als auch globalen Interpolation durch gewichtete Radian erfüllen diese Anforderungen.

Die adaptive Simulation der Einheitsvektoren mit anschließender Interpolation der Grenzzustandsfunktion mittels der entwickelten Interpolationsfunktionen erwies sich als eine robuste Methode zur Berechnung von Versagenswahrscheinlichkeiten und verbindet die Vorteile des directional sampling, des importance sampling und der Antwortflächenverfahren.

Vorzugsweise muss die Interpolation im Standardnormalraum erfolgen. Generell wurde vorausgesetzt, dass das Systemverhalten zeitunabhängig ist und eine mögliche Vorschädigung der Struktur vernachlässigt werden kann.

Ein Interpolationsfehler kann durch die Suche weiterer Grenzzustandspunkte in einem nachträglichen Simulationslauf abgeschätzt werden. Anschließend kann der Interpolationsfehler definiert werden als der Schätzer der zusätzlichen Stichproben für den Betrag der Differenzen der bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten in den Grenzzustandspunkten und in den entsprechenden Schnittpunkten der Richtungsvektoren mit der Antwortflächenfunktion. Darüber hinaus kann eine Konvergenzordnung des Interpolationsfehlers in einer gewählten Norm eines Sobolew-Raumes angegeben werden.

Die Bestimmung der Grenzzustände von Strukturen mit sowohl geometrisch als auch physikalisch nichtlinearem Verhalten erfolgte mittels der Finite-Elemente-Methode. Dazu wurde ein geometrisch nichtlineares Schalenelement weiterentwickelt. In einer herkömmlichen Formulierung eines lokalen Koordinatensystems in den Finite-Elemente-Knoten treten numerische Schwierigkeiten bei der Stabilitätsanalyse und in geometrisch nichtlinearen Berechnungen auf. Durch eine alternative Festlegung des Koordinatensystems kann das finite Schalenelement auch in derartigen Analysen angewendet werden. Die entstehende Element-Steifigkeitsmatrix ist sowohl auf globale als auch auf lokale Knoten-Freiheitsgrade bezogen. Ein Basiswechsel mit Koordinatentransformation wurde verwendet, damit das vorgestellte finite Schalenelement auch in Verbindung mit anderen finiten Elementen benutzt werden kann.

Bei der Auswahl des effizientesten Verfahrens zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit müssen immer die Besonderheiten der Analyse der Strukturantwort und die Art des Grenzzustandes berücksichtigt werden. Es konnte gezeigt werden, dass das entwickelte adaptive Interpolationsverfahren besonders gut für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von großen Strukturen mit stark nichtlinearem Verhalten geeignet ist.

# 1

## Einleitung

### 1.1 Problemstellung

Neben der Gewährleistung der Funktionstüchtigkeit ist auch die Beurteilung der Sicherheit einer Tragstruktur eine der wichtigsten Ingenieuraufgaben. Sicherheit lässt sich quantifizieren als die Wahrscheinlichkeit, mit der die Einwirkungen die Beanspruchbarkeit einer Struktur während der gesamten Lebensdauer nicht überschreiten. Üblicherweise wird aber nicht das Maß der Sicherheit, sondern das Komplement, die Versagenswahrscheinlichkeit, berechnet. Da sich die Größen, die Einwirkungen und Beanspruchbarkeit charakterisieren, nicht deterministisch festlegen lassen, müssen sie als zufällig streuende Variablen (Basisvariablen) modelliert werden. Zu berücksichtigende Basisvariablen sind häufig Lasten, mechanische Materialeigenschaften, geometrische Größen, Lagerungsbedingungen und Imperfektionen. In Abhängigkeit von der jeweiligen Problemstellung kann es auch notwendig sein, eine räumliche Verteilung (Zufallsfeld) oder auch eine zeitliche Verteilung (stochastischer Prozess) der Basisvariablen zu berücksichtigen. Beide Verteilungsformen werden hier nicht behandelt. Die Betrachtung erfolgt für zeitunabhängige Probleme.

Es werden verschiedene Stufen der Zuverlässigkeitsanalyse – nach Eurocode 1 Level I bis III genannt – unterschieden. Die Stufe I entspricht dem Stand aktueller Normung. In dieser werden charakteristische Werte für die Einwirkungs- und Widerstandsgrößen und deren Erhöhung beziehungsweise Abminderung mit Sicherheitsbeiwerten vorgeschrieben.

Die bekanntesten Verfahren der Stufe II sind die Zuverlässigkeitsverfahren erster und zweiter Ordnung. Einen kurzen Überblick über diese Verfahren bietet der Abschnitt [2.3](#).

Als Level III-Methoden werden solche bezeichnet, die unter Berücksichtigung der gemeinsamen Verteilung der Basisvariablen und ohne Approximation des Integrationsbereiches das Integral der gemeinsamen Dichtefunktion der Zufallsvariablen über den Versagensbereich auswerten. Direkte numeri-

sche Integrationsverfahren, aber auch adaptive numerische Integrationsverfahren sind nur bei der Verwendung weniger Zufallsgrößen effizient. Bei sehr vielen Zufallsgrößen sind im Allgemeinen die Monte-Carlo-Verfahren effizienter.

## 1.2 Verwendete Methoden und Verfahren

Unter der Vielzahl der entwickelten varianzmindernden Simulationsverfahren werden nur die kurz erläutert, die in der vorliegenden Arbeit Verwendung finden. Abschnitt 2.5 dokumentiert die verwendeten Simulationsverfahren.

Ein Kompromiss zwischen Genauigkeit und Recheneffizienz wird durch die Approximation oder Interpolation einer Strukturantwort in den sogenannten Antwortflächenverfahren erreicht. Der Grundgedanke besteht in der Approximation der wahren Grenzzustandsfunktion der Strukturantwort durch eine einfach gewählte Funktion. Stützstellen für die Approximation werden durch im Allgemeinen aufwendige Finite-Elemente-Berechnungen in möglichst geringer Anzahl bestimmt. Die Versagenswahrscheinlichkeit kann anschließend mittels eines beliebigen Level III-Verfahrens auf der Basis der approximierenden Funktion (Antwortfläche) ermittelt werden. Die klassischen Antwortflächenverfahren werden im Abschnitt 4.2 besprochen.

## 1.3 Entwickelte Verfahren zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten effizienteren Interpolationsverfahren werden ausführlich im Kapitel 4 vorgestellt und beschrieben. Diese Verfahren interpolieren die Grenzzustandsfunktion und nicht die Funktion der Strukturantwort durch gewichtete Radian und durch Hyperebenen. Zudem wird die Suche der Interpolationsstützstellen adaptiv verbessert.

Die Bestimmung der Grenzzustände von Strukturen mit sowohl geometrisch als auch physikalisch nichtlinearem Verhalten mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode wird im Kapitel 3 beschrieben. Bei der Auswahl des effizientesten Verfahrens zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit müssen immer die Besonderheiten der Analyse der Strukturantwort und die Art des Grenzzustandes berücksichtigt werden. Wie im Abschnitt 3.4 gezeigt wird, sind das adaptive directional sampling in Verbindung mit den in dieser Arbeit entwickelten Interpolationsverfahren besonders gut für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Strukturen mit nichtlinearem Verhalten geeignet. In diesem Sinne wird in der vorliegenden Arbeit versucht, eine Verbindung zwischen den hochentwickelten Simulationstechniken der Stochastik und den Methoden der Analyse großer nichtlinearer Strukturen zu schaffen.

## 2

# Zuverlässigkeitsanalyse

## 2.1 Formulierung der Versagenswahrscheinlichkeit für zeit-invariantes Strukturverhalten

In der Zuverlässigkeitsanalyse ist das Systemverhalten im Bereich des Grenzzustandes einer Struktur besonders bedeutend. Der Versagenszustand ist definiert durch eine deterministische Grenzzustandsfunktion

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (2.1)$$

(vgl. Abbildung 2.1) in Abhängigkeit einer jeweiligen Realisation der Basisvariablen  $\mathbf{x}$ . Jedem Punkt des  $n$ -dimensionalen Raumes mit den Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte zugeordnet. Die Versagenswahrscheinlichkeit eines Systems ist gegeben durch

$$P(F) = P[\mathbf{X} : g(\mathbf{X}) \leq 0] = \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.2)$$

worin  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  die gemeinsame Dichtefunktion der Basisvariablen  $\mathbf{X}$  ist. Richtwerte für die akzeptierte Versagenswahrscheinlichkeit legt zum Beispiel der EC1 (1994) fest. Demnach sind, z.B. in Bezug auf eine Nutzungsdauer von einem Jahr, für den Verlust der Gebrauchstauglichkeit Versagenswahrscheinlichkeiten von  $P(F) = 10^{-3}$  und für Kollapsversagen  $P(F) = 10^{-6}$  akzeptabel.

In der Regel sind die Dichtefunktionen so kompliziert, dass eine geschlossene Integration der Gleichung (2.2) nur in einigen Ausnahmefällen möglich ist. Sind z.B. alle  $\mathbf{X}$  normalverteilt und ist  $g(\mathbf{x})$  eine lineare Funktion, so ist dies gegeben. Direkte numerische Integrationsverfahren, zum Beispiel Davis und Rabinowitz (1984) und Scraton (1984), aber auch adaptive numerische

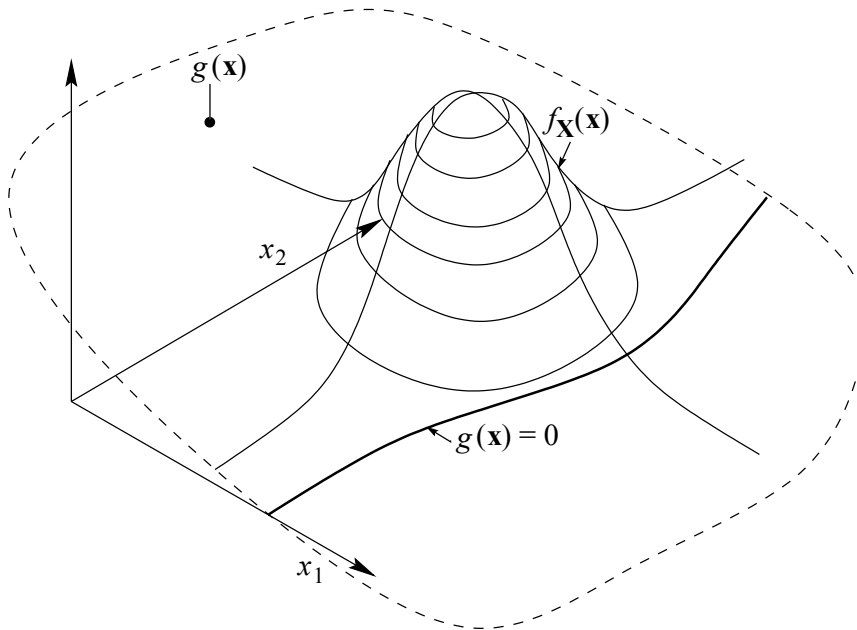


Abbildung 2.1:  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ : Gemeinsame Dichtefunktion der Basisvariablen,  $g(\mathbf{x})$ : Funktion der Strukturantwort,  $g(\mathbf{x}) = 0$ : Grenzzustandsfunktion.

Integrationsverfahren, zum Beispiel [Genz \(1991\)](#), [Van Dooren und De Ridder \(1976\)](#) sowie [Stroud \(1971\)](#), sind nur bei der Verwendung weniger Zufallsgrößen effizient, da der Rechenaufwand annähernd mit der  $n$ -ten Potenz ansteigt. [Ouypornprasert \(1987\)](#) gibt für die effektive Nutzung von Integrationsverfahren eine Grenze von  $n \leq 10$  an. Sollen mehr als  $n = 10$  Basisvariablen verwendet werden, sind im Allgemeinen die Approximationsverfahren (siehe Abschnitt [2.2](#) und [2.3](#) und Kapitel [4](#)) und bei sehr vielen Zufallsgrößen die Monte-Carlo-Verfahren (siehe Abschnitt [2.4](#) und Abschnitt [2.5](#)) effizienter. Objektive Vergleiche der verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit finden sich z.B. in [Ouypornprasert \(1988\)](#) sowie in [Ayyub und Haldar \(1984\)](#). Die Eignung der verschiedenen varianzmindernden Monte-Carlo-Simulationen werden z.B. in [Engelund und Rackwitz \(1993\)](#) sowie [Bayer \(1999\)](#) diskutiert.



## 2.2 Methode der zweiten Momente erster Ordnung

In der Methode der zweiten Momente erster Ordnung<sup>1</sup> wird die Grenzzustandsfunktion  $g(\mathbf{x})$  in einem beliebigen Punkt  $\mathbf{x}_0$  durch eine Taylor-Reihe

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \dots \quad (2.3)$$

entwickelt. Diese sehr einfache Möglichkeit, um zu einer Näherungslösung für die Versagenswahrscheinlichkeit (2.2) zu kommen, wurde von Cornell (1969) eingeführt. Der Erwartungswert des Sicherheitsabstandes  $Z = g(\mathbf{X})$  errechnet sich für einen Abbruch der Taylor-Reihe nach dem quadratischen Glied aus

$$E[Z] = E[g(\mathbf{X})] = g(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} E[X_i - x_{0i}] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} E[(X_i - x_{0i})(X_j - x_{0j})]$$

und für einen Abbruch der Taylor-Reihe nach dem linearen Glied aus

$$E[Z] = E[g(\mathbf{X})] = g(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} E[X_i - x_{0i}]$$

Wird für den Entwicklungspunkt  $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{X}}$  gewählt, ergibt sich der Erwartungswert von  $Z$  zu

$$E[Z] = g(\mathbf{x}_0)$$

und die Varianz für einen Abbruch der Taylor-Reihe nach dem linearen Glied zu

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= E[(Z - \bar{Z})^2] \\ &= E \left[ \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \bigg|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{X}}} (X_i - \bar{X}) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \bigg|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{X}}} E[(X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X})] \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>engl.: first-order second-moment analysis

Mit der Annahme, dass die Verteilungsfunktion  $F_Z(z)$  durch eine Normalverteilung

$$F_Z(z) = \Phi\left(\frac{z - \bar{Z}}{\sigma_Z}\right)$$

angenähert werden kann, ergibt sich die Versagenswahrscheinlichkeit (2.2) zu

$$\tilde{P}(F) = \tilde{P}[Z \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f_Z(z) dz = F_Z(0) = \Phi\left(\frac{-\bar{Z}}{\sigma_Z}\right) = \Phi(-\beta) \quad (2.4)$$

Die Linearisierung um den Mittelwert führt allerdings im Allgemeinen nicht zum kleinsten Sicherheitsindex  $\beta$  und ist nur einsetzbar, wenn die Nichtlinearität von  $g(\mathbf{X})$  gering ist oder wenn der wahrscheinlichste Versagenspunkt in der Nähe des Mittelwertes liegt. Eine Linearisierung der Grenzzustandsfunktion an dem wahrscheinlichsten Versagenspunkt führt zu einer Verbesserung der Abschätzung der Versagenswahrscheinlichkeit (2.2). Dieser Punkt kann iterativ gefunden werden (siehe Rackwitz und Fiessler (1978)).

## 2.3 Zuverlässigkeitsverfahren erster und zweiter Ordnung

Die Zuverlässigkeitsverfahren erster und zweiter Ordnung<sup>2</sup> approximieren die Grenzzustandsfunktion im Bemessungspunkt, dem Punkt höchster Wahrscheinlichkeitsdichte, durch eine lineare bzw. quadratische Funktion und liefern eine Abschätzung des Integrals (2.2) (siehe zum Beispiel Shinozuka (1983), Hasofer und Lind (1974)). Ursprünglich sind die Zuverlässigkeitsverfahren erster und zweiter Ordnung für eine Erweiterung der Methoden der zweiten Momente erster Ordnung entwickelt worden. Im Gegensatz zu diesen werden aber die Verteilungsfunktionen nicht nur durch die ersten und zweiten Momente angenähert. Die Zuverlässigkeitsverfahren erster und zweiter Ordnung sind nur gültig für unkorrelierte, standardisierte und normalverteilte Zufallsvariablen. Andere Variablen sind zunächst mit Hilfe z.B. des Nataf-Modells zu transformieren (Nataf (1982), Liu und Der Kiureghian (1986)). Die korrelierten normalverteilten Zufallsvariablen  $Y_i$  erhält man somit durch

$$Y_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) ; \quad i = 1 \dots n$$

aus den korrelierten nicht-normalverteilten Zufallsvariablen  $X_i$ . Die Koeffizienten der Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$  können iterativ aus der Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$  ermittelt werden, so dass sich die unkorrelierten und standardnormalverteilten Zufallsvariablen aus der Transformation

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{Y}$$

---

<sup>2</sup>engl.: first and second order reliability methods

berechnen lassen, wobei  $\mathbf{L}$  sich aus der Cholesky-Zerlegung von  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

ergibt. Im Standard-Normalraum  $\mathbf{u}$  ist der Bemessungspunkt  $\mathbf{u}^*$  der Punkt auf der Grenzzustandsfunktion  $g(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = 0$ , der den kürzesten Abstand  $\beta$  zum Koordinatenursprung besitzt:

$$\mathbf{u}^* : \mathbf{u}^T \mathbf{u} \rightarrow \min; \quad g(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = 0$$

Dies führt zur Lagrange-Funktion

$$L = \mathbf{u}^T \mathbf{u} + \lambda g(\mathbf{u}) \rightarrow \min$$

Der Punkt  $\mathbf{u}^*$  lässt sich somit durch übliche nichtlineare Optimierungsverfahren lokalisieren. Wird die Grenzzustandsfunktion  $g(\mathbf{u})$ , entsprechend der Taylor-Serie (2.3), am Bemessungspunkt  $\mathbf{u}^*$  und nur mit dem linearen Glied entwickelt, ergibt sich die Versagenswahrscheinlichkeit der Gleichung (2.4). Diese ist exakt, wenn  $g(\mathbf{u})$  linear ist.

Die Ungenauigkeit infolge der Linearisierung soll durch die Zuverlässigkeitsverfahren zweiter Ordnung verbessert werden. Hier wird die Grenzzustandsfunktion durch eine Fläche zweiter Ordnung im Bemessungspunkt angenähert. Es gibt verschiedene Ansätze hierzu (z.B. Tvedt (1983)). Breitung (1984) gibt für die Versagenswahrscheinlichkeit die Näherungsformel

$$\tilde{P}(F) = \Phi(-\beta) \left[ \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \beta \kappa_i) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

an, wobei  $\kappa_i$  die  $i$ -te Hauptkrümmung der Grenzzustandsfunktion  $g(\mathbf{u}^*) = 0$  am Entwicklungspunkt ist. Diese Näherungslösung strebt mit größer werdendem Sicherheitsindex  $\beta$  asymptotisch gegen die exakte Lösung. Die Versagenswahrscheinlichkeit wird für  $\beta \rightarrow \infty$  exakt ermittelt. Allerdings liegen realistische Werte des Sicherheitsindex im Bereich von 3 bis 5. Desweiteren kann der Aufwand zur Berechnung der zweiten Ableitungen der Grenzzustandsfunktion am Entwicklungspunkt erheblich sein.

Die Zuverlässigkeitsverfahren erster und zweiter Ordnung haben zwei wesentliche Nachteile, die zu einer Fehleinschätzung der tatsächlichen Sicherheit führen können. Zum einen können die Abweichungen infolge einer erforderlichen Approximation bei stark gekrümmten Grenzzustandsfunktionen sehr groß sein, insbesondere bei hoher Dimension  $n$ . Zum anderen ist es möglich, dass es keinen eindeutigen Bemessungspunkt gibt, zum Beispiel bei einer zum Ursprung symmetrischen Grenzzustandsfunktion oder bei einer aus mehreren Teilfunktionen zusammengesetzten Grenzzustandsfunktion, etwa bei Betrachtung des Systemversagens mehrerer Komponenten. Eine Abschätzung des Fehlers bieten diese Verfahren nicht. Eine Fehlerabschätzung und Verbesserung des Ergebnisses durch Simulation erfolgt bei Hohenbichler und Rackwitz (1988).

## 2.4 Monte-Carlo-Simulation

Die Lösung des Integrals (2.2) durch Simulation wird als Monte-Carlo-Integration bezeichnet. Die Monte-Carlo-Simulation eignet sich ausgezeichnet zur numerischen Auswertung von mehrdimensionalen Integralen. Mit der Einführung einer Indikatorfunktion

$$I(g(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & : g(\mathbf{x}) > 0 \\ 1 & : g(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

ergibt sich für die Versagenswahrscheinlichkeit

$$P(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} I(g(\mathbf{x})) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.5)$$

Somit kann die Versagenswahrscheinlichkeit als Erwartungswert der Indikatorfunktion betrachtet werden:

$$P(F) = E[I(g(\mathbf{x}))] \quad (2.6)$$

Der statistische Mittelwert

$$\bar{P}(F) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{x}_i)) \quad (2.7)$$

mit  $N$  Realisationen der Basisvariablen  $\mathbf{x}_i$  ist ein erwartungstreuer Schätzer der Gleichung (2.6). Das Verfahren beruht darauf, dass Realisationen  $\mathbf{x}_i$  der Lasten, der mechanischen Eigenschaften des Materials, geometrischen Größen usw. simuliert werden und dass für jede dieser Realisationen eine nichtlineare Strukturanalyse durchgeführt und überprüft wird, ob die Realisation im Versagensbereich liegt. Der Erwartungswert der Varianz des Schätzers ist

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{P}(F)}^2 &= E[(\bar{P}(F) - E[\bar{P}(F)])^2] \\ &= E[(\bar{P}(F))^2 - 2\bar{P}(F)E[\bar{P}(F)] + (E[\bar{P}(F)])^2] \\ &= E[(\bar{P}(F))^2] - 2(E[\bar{P}(F)])^2 + (E[\bar{P}(F)])^2 \\ &= E[(\bar{P}(F))^2] - (E[\bar{P}(F)])^2 \end{aligned}$$

und mit (2.7)

$$\begin{aligned}
\sigma_{\bar{P}(F)}^2 &= E \left[ \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{x}_i)) \right)^2 \right] - \left( E \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{x}_i)) \right] \right)^2 \\
&= E \left[ \frac{1}{N^2} \left( \sum_{j=1}^N I(g(\mathbf{x}_j)) \right) \left( \sum_{k=1}^N I(g(\mathbf{x}_k)) \right) \right] - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[I(g(\mathbf{x}_i))] \right)^2 \\
&= \frac{1}{N^2} E \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N I(g(\mathbf{x}_j)) I(g(\mathbf{x}_k)) \right] - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(F) \right)^2 \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N E[I(g(\mathbf{x}_j)) I(g(\mathbf{x}_k))] - (P(F))^2 \\
&= \frac{N^2 - N}{N^2} (E[I(g(\mathbf{x}_j))] E[I(g(\mathbf{x}_k))] + N E[I(g(\mathbf{x}_i))]) - (P(F))^2 \\
&= \frac{N^2 - N}{N^2} (P(F))^2 + \frac{1}{N} P(F) - (P(F))^2 \\
&= \frac{P(F) - (P(F))^2}{N}
\end{aligned}$$

und für kleine Versagenswahrscheinlichkeiten

$$\sigma_{\bar{P}(F)}^2 \approx \frac{P(F)}{N}$$

Die auf die Zahl der Simulationen bezogene Standardabweichung ist näherungsweise

$$\sigma_{\bar{P}(F)} \approx \sqrt{\frac{P(F)}{N}}$$

Die erforderliche Anzahl  $N$  der Simulationen ist demnach unabhängig von der Dimension des Problems. Sie ergibt sich allein aus der Größe der zu erwartenden Versagenswahrscheinlichkeit und einer vorgegebenen Varianz des Schätzers. Diese einfache Monte-Carlo-Simulation erfordert allerdings bei sehr kleinen Versagenswahrscheinlichkeiten einen außerordentlich großen Stichprobenumfang. Zum Beispiel sind  $N \geq 10^8$  Simulationen für einen vorgegebenen Variationskoeffizienten  $\sigma_{\bar{P}(F)}/E[\bar{P}(F)]$  von 10 % und ein Sicherheitsniveau von  $P(F) = 10^{-6}$  erforderlich.

## 2.5 Importance Sampling

Da die direkte Simulation mittels der einfachen Monte-Carlo-Simulationsmethode hinsichtlich begrenzter Computer-Ressourcen für die Zuverlässigkeitsanalyse komplexer Strukturen nicht praktikabel erscheint, wurde eine

Reihe varianzmindernder Simulationstechniken entwickelt. Das Ziel dieser Simulationsverfahren ist es, die Varianz des Schätzers  $\sigma_{\tilde{P}(F)}^2$  zu verringern und dadurch die erforderliche Anzahl  $N$  an Simulationen zu reduzieren. Um dies zu erreichen, verwendet man für die Simulation der Basisvariablen  $\mathbf{x}_i$  nicht die Original-Dichtefunktion  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , sondern eine spezifische Simulations-Dichtefunktion  $h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$ , so dass möglichst viele Stichproben der somit eingeführten Basisvariablen  $\mathbf{Y}$  in jene Bereiche fallen, die eine hohe Wahrscheinlichkeitsdichte aufweisen. Die Zufallsvariablen  $\mathbf{Y}$  sind in dem Wertebereich von  $\mathbf{X}$  definiert. Der Integrand der Gleichung (2.5) erweitert ergibt dann

$$P(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} I(g(\mathbf{x})) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})} h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit ist der Erwartungswert

$$P(F) = E \left[ I(g(\mathbf{x})) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})} \right]$$

in Bezug auf die Dichtefunktion  $h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$ . Durch Simulation von Stichproben  $\mathbf{x}_i$  nach der Verteilung  $h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$  ergibt sich der Schätzwert von  $P(F)$  zu

$$\tilde{P}(F) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{x}_i)) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i)} \quad (2.8)$$

Die Varianz des Schätzers errechnet sich zu

$$\sigma_{\tilde{P}(F)}^2 = E[(\tilde{P}(F) - P(F))^2]$$

und unter Berücksichtigung der Beziehung (2.8) weiter zu

$$\sigma_{\tilde{P}(F)}^2 = E \left[ \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{x}_i)) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i)} - P(F) \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

Die Varianz des Schätzers wird demzufolge zu Null ([Rubinstein \(1981\)](#)), wenn die Simulations-Dichtefunktion die folgende Gestalt besitzt:

$$h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = I(g(\mathbf{x})) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{P(F)}$$

mit der daraus resultierenden Eigenschaft

$$h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{P(F)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) & : g(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 & : g(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Dies würde aber voraussetzen, dass die exakte Lösung für  $P(F)$  bekannt wäre. Die unterschiedlichen Varianten des importance sampling versuchen daher, diese ideale Simulations-Dichtefunktion anzunähern (siehe dazu z.B. Rubinstein (1981)). Aus der Fülle der varianzmindernden Simulationsverfahren wird im folgenden Abschnitt allein das adaptive sampling beschrieben, da dieses sehr robuste Verfahren zur Simulation der Basisvariablen unter der Verwendung der Antwortflächen im Kapitel 4 benutzt wird und zudem Ausgangsbasis für eine Adaption der Suchrichtungen der Grenzzustandspunkte ist.

## 2.6 Adaptive Sampling

Eine mögliche Näherung der idealen Simulationsdichte (2.10) wird von Bucher (1988) angegeben. Hier wird gefordert, dass die statistischen Momente erster und zweiter Ordnung der Simulationsdichte gleich den statistischen Momenten derjenigen Stichproben der Basisvariablen  $\mathbf{X}$  sind, die in den Versagensbereich fallen:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Y}] &= E[\mathbf{X} | g(\mathbf{x}) \leq 0] \\ E[(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})^T] &= E[(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T | g(\mathbf{x}) \leq 0] \end{aligned}$$

Nach einer ersten Simulation werden die statistischen Momente der Stichproben der Basisvariablen im Versagensbereich berechnet. Diese sind dann die Verteilungsparameter der normalverteilten Zufallsvariablen  $\mathbf{Y}$ , die zur Simulation in einem nächsten Iterationsschritt verwendet werden. In mehreren wiederholten Läufen kann so die Simulationsdichte  $h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$  adaptiv ermittelt werden. Für den ersten Simulationslauf kann zum Beispiel eine Simulationsdichte verwendet werden, die größere Standardabweichungen als die Verteilung der Basisvariablen besitzt. Der Mittelwertsvektor  $E[\mathbf{Y}]$  kann entweder identisch mit dem der Basisvariablen oder aber, wie von Bucher (1988) vorgeschlagen, als der gemeinsame Schwerpunkt aller Teilflächenschwerpunkte  $\bar{x}_i$  der eindimensionalen bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten  $P(F_i)$  (im Versagensbereich)

$$E[\mathbf{Y}] = \frac{P(F_i) \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n P(F_i)}$$

gewählt werden. Diese zweite Variante benötigt weniger Stichproben als die erste Simulation am Mittelwert.

## 2.7 Directional Sampling

Die grundlegende Idee des directional sampling ist die Simulation von Richtungsvektoren auf Punkte der Grenzzustandsfunktion und die damit verbun-

dene Verwendung von analytischen Teillösungen für die bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten der gegebenen Richtungen. Dieses Verfahren wurde von Deák (1980) vorgeschlagen und in den Arbeiten von Bjerager (1988); Ditlevsen und Bjerager (1988); Ditlevsen u. a. (1988, 1990) in der Zuverlässigkeitsanalyse verwendet. Das Verfahren des directional sampling passt zunächst nicht in das Schema des importance sampling hinein, da es ausschließlich einen Mittelwert aus allen Realisationen bildet. Es ist aber dennoch hier aufgeführt, da es genauso wie das im Kapitel 4 entwickelte Antwortflächenverfahren sehr gut zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit komplexer nichtlinearer Strukturen und wenigen Zufallsvariablen geeignet ist und daher im Sinne eines Benchmark-Tests für die Analyse der Beispiele im Kapitel 5 Verwendung findet. Die Formulierung des Verfahrens setzt voraus, dass die Komponenten des Vektors der Basisvariablen unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind oder entsprechend, z.B. mittels einer Nataf-Transformation (siehe Nataf (1982), Liu und Der Kiureghian (1986)), transformiert werden können. Der Vektor der Zufallsvariablen soll mit  $\mathbf{U}$  gekennzeichnet sein. Jeder Punkt  $\mathbf{u}$  in diesem Raum kann in der Form von Polarkoordinaten

$$\mathbf{u} = r\mathbf{a} \quad (2.11)$$

geschrieben werden. Hierin bezeichnet

$$r = \|\mathbf{u}\|$$

die Länge des Vektors  $\mathbf{u}$ , gemessen vom Koordinatenursprung, und

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

ist ein Einheitsvektor, der die Richtung festlegt. Die gemeinsame Dichtefunktion standardnormalverteilter Zufallsvariablen ist bekanntlich

$$f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{u}\right) \quad (2.12)$$

Die Beziehung (2.11), in den Exponenten von (2.12) eingesetzt, ergibt

$$\mathbf{u}^T\mathbf{u} = (r\mathbf{a})^T(r\mathbf{a}) = r^2\mathbf{a}^T\mathbf{a} = r^2$$

Die Dichtefunktion  $f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u})$  ist demnach rotationssymmetrisch und von  $\mathbf{A}$  unabhängig. Außerdem sind somit auch  $R$  und  $\mathbf{A}$  voneinander unabhängig, so dass gilt:

$$f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = f_{R,\mathbf{A}}(r, \mathbf{a}) = f_{R|\mathbf{A}}(r|\mathbf{a})f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) = f_R(r)f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$$

Die Dichtefunktion für  $r = \sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}$  ergibt sich aus der Integration der gemeinsamen Dichtefunktion (2.12) über die Oberfläche  $S_n$  einer  $n$ -dimensionalen



Kugel mit dem Radius  $r$  zu

$$f_R(r) = S_n r^{n-1} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\pi}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)$$

Es wird vorausgesetzt, dass der Koordinatenursprung nicht im Versagensbereich liegt und dass es in jeder Richtung  $\mathbf{a}$  nur einen eindeutigen Grenzzustandspunkt mit  $g(r^*(\mathbf{a})|\mathbf{a}) = 0$  gibt. Somit ergibt sich das Integral (2.2)

$$\begin{aligned} P(F) &= \int_{g(\mathbf{u}) \leq 0} f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\ &= \int_{S_n} \int_{r^*(\mathbf{a})}^{\infty} f_{R|\mathbf{A}}(r|\mathbf{a}) f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) dr d\mathbf{a} \\ &= E[P(F)|\mathbf{a}] \end{aligned} \quad (2.13)$$

als Erwartungswert der bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten für die gegebenen Richtungen

$$\begin{aligned} P(F)|\mathbf{a} &= P[R \geq r^*(\mathbf{a})] \\ &= \int_{r^*(\mathbf{a})}^{\infty} f_{R|\mathbf{A}}(r|\mathbf{a}) dr \\ &= \int_{r^*(\mathbf{a})}^{\infty} S_n r^{n-1} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\pi}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr \\ &= 1 - \chi_n^2(r^{*2}(\mathbf{a})) \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobei  $\chi_n^2(\cdot)$  die Chi-Quadrat-Verteilung mit dem Freiheitsgrad  $n$  darstellt. Für das eindimensionale Integral (2.14) existiert eine gute numerische Approximation (siehe Abramowitz und Stegun (1972)), so dass sich ein erwartungstreuer Schätzer für die Versagenswahrscheinlichkeit (2.13) aus dem Mittel der bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten zu

$$\bar{P}(F) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1 - \chi_n^2(r_i^{*2}(\mathbf{a}_i))$$

ergibt.

## 2.8 Adaptive Directional Sampling

Das adaptive directional sampling koppelt das importance sampling mit dem directional sampling für die Simulation der Einheitsvektoren. Dazu wird wie

im Abschnitt 2.5 eine spezifische Simulations-Dichtefunktion  $h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{a})$  für die Richtungen  $\mathbf{a}$  eingeführt, so dass sich die Versagenswahrscheinlichkeit (2.13) wieder als der Erwartungswert

$$\begin{aligned} P(F) &= \int_{S_n} \int_{r^*(\mathbf{a})}^{\infty} f_{R|\mathbf{A}}(r|\mathbf{a}) \frac{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{a})} h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{a}) \, dr d\mathbf{a} \\ &= E \left[ P(F) | \mathbf{a} \frac{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{a})} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

in Bezug auf die Dichtefunktion  $h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{a})$  ergibt. Der Schätzer für die Versagenswahrscheinlichkeit (2.15) ist dann

$$\tilde{P}(F) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - \chi_n^2(r_i^{*2}(\mathbf{a}_i))) \frac{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_i)}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{a}_i)}$$

In Bjerager (1988) und Ditlevsen u. a. (1990) sind für einige Spezialfälle von Grenzzustandsfunktionen optimale Simulationsdichten angegeben. Für allgemeine Grenzzustandsfunktionen kann eine Adaption der Simulationsdichte vorgenommen werden, so dass gilt (siehe Bucher (1988), Abschnitt 2.5):

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Y}] &= E[\mathbf{A} | g(r^*(\mathbf{a}) \mathbf{a}) \leq 0] \\ E[(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})^T] &= E[(\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}})(\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}})^T | g(r^*(\mathbf{a}) \mathbf{a}) \leq 0] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Statt dieser Forderung, dass die statistischen Momente erster und zweiter Ordnung der Simulationsdichte gleich den statistischen Momenten derjenigen Stichproben der Basisvariablen  $\mathbf{A}$  sind, die in den Versagensbereich fallen, wird in Kijawatworawet (1991); Kijawatworawet u. a. (1998), gleichbedeutend mit (2.16), für die Ermittlung der Simulationsdichte

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Y}] &= \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i w_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \\ E[(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})^T] &= \frac{\sum_{i=1}^N w_i (\mathbf{a}_i - \bar{\mathbf{a}})(\mathbf{a}_i - \bar{\mathbf{a}})^T}{\sum_{i=1}^N w_i} \end{aligned} \quad (2.17)$$

angegeben, wobei die Gewichte  $w_i$  definiert sind durch

$$w_i = \int_{r_i^*(\mathbf{a})}^{\infty} r_i^{n-1} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2}\right) \, dr_i \quad (2.18)$$

Diese Simulationsdichte  $h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{a})$  der Einheitsvektoren auf der Hypersphäre ergibt sich durch Integration in radialer Richtung (siehe Kijawatworawet u. a. (1998)). Die Beispiele in Kijawatworawet u. a. (1998) zeigen, dass sich mit dem adaptive directional sampling mindestens zwei dominante Bereiche erfassen lassen.

# 3

## Grenzzustände nichtlinearer Strukturen

### 3.1 Einleitung

Das Ziel dieses Kapitels ist es, grundlegende Aussagen zur Bestimmung von Grenzzuständen nichtlinearer Strukturen zu treffen. Einführend wird das grundlegende Prinzip der finiten Elemente erörtert und es sollen die linearen Gleichgewichtsbeziehungen für kleine Verrückungsgrößen angegeben werden. Anschließend werden die das kinematische Verhalten von belasteten nichtlinearen Strukturen mit großen Verschiebungen und großen Drehungen aber kleinen Verzerrungen beschreibenden Beziehungen hergeleitet. Diese kurz gehaltene Darstellung erfolgt, damit die Beziehungen zur Bestimmung des Grenzzustandes im Abschnitt 3.4 hergeleitet werden können. Als ein Beispiel für die Beschreibung des nichtelastischen Materialverhaltens der Strukturen wird ein elastisch-plastisches Materialgesetz angegeben. Die numerische Lösung der entstehenden nichtlinearen Bewegungsgleichung wird mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode gefunden. Eine beispielhafte Entwicklung eines Schalenelementes ist im Abschnitt 3.3 und im Anhang A beschrieben. Mit diesem finiten Element und einem elastisch-plastischen Materialverhalten ist ein Anwendungsbeispiel untersucht worden. Im Abschnitt 3.4 sind die Möglichkeiten der Identifikation von Grenzzuständen beschrieben.

### 3.2 Finite-Elemente-Methode

#### 3.2.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das Bild 3.1 zeigt die Bewegung eines allgemeinen Körpers in einem stationären, kartesischen Koordinatensystem. Die Differentialgleichungen für das Gleichgewicht des Körpers unter vorgegebener äußerer Belastung lassen

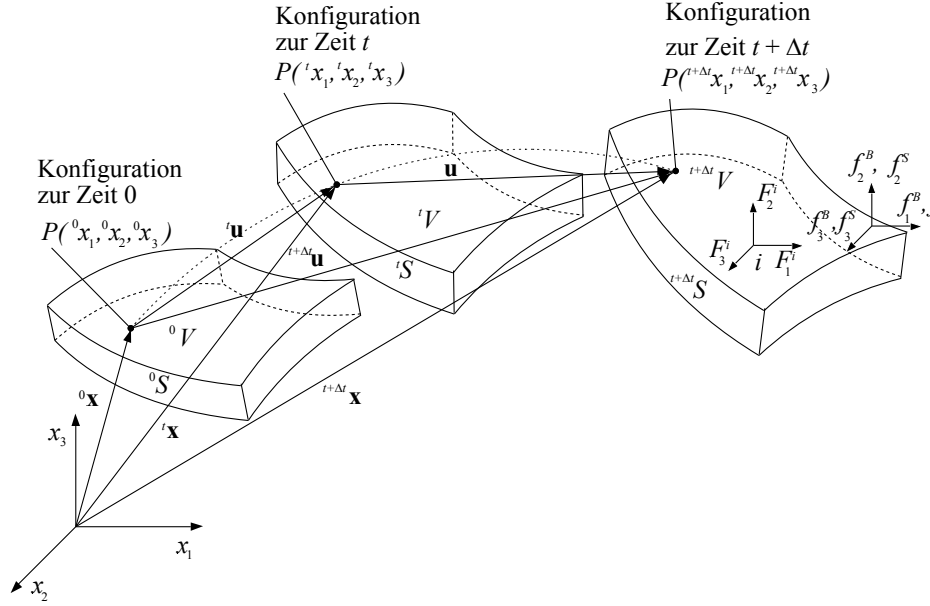


Abbildung 3.1: Bewegung eines allgemeinen Körpers

sich direkt aus den Gleichgewichtsbetrachtungen an differentiellen Elementen oder aus der Stationaritätsbedingung für das Gesamtpotential des Körpers gewinnen. In den Lagrangeschen inkrementellen Verfahren (siehe u.a. [Bathe \(1996\)](#) und [Ramm \(1976\)](#)) wird das Gleichgewicht in einer Konfiguration zur Zeit  $t + \Delta t$  mit Hilfe der Stationaritätsbedingung ausgedrückt. Das Gesamtpotential des Körpers ergibt sich zu

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\epsilon}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{S} {}^{t+\Delta t} dV - \int_{t+\Delta t V} \mathbf{u}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B {}^{t+\Delta t} dV - \int_{t+\Delta t S} \mathbf{u}^{S^T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S {}^{t+\Delta t} dS - \sum_i \mathbf{u}^{i^T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^i \quad (3.1)$$

Hierin ist  $\boldsymbol{\epsilon}$  der Darstellungsvektor des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors und  $\mathbf{S}$  der Darstellungsvektor des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors zur Zeit  $t + \Delta t$  (siehe dazu Abschnitt 3.2.3). Die Verschiebungsvektoren  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}^S$  und  $\mathbf{u}^i$  sind die Verschiebungen, denen ein Körper im Inneren, an seiner Oberfläche und in einem Punkt  $i$  zum betrachteten Zeitpunkt  $t + \Delta t$  unterworfen ist. Die Vektoren  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S$  und  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^i$  sind die zur Zeit  $t + \Delta t$  aktuellen auf den Körper wirkenden Volumenkräfte, Oberflächenspannungen und Einzelkräfte. Die Forderung nach der Stationarität des Gesamtpotentials, d.h. dass das Funktional  $\Pi$  minimal wird, führt zu der Variationsaufgabe

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.2)$$

Damit entsteht aus (3.1) das Prinzip von der Stationarität des Gesamtpotentials

$$\int_{t+\Delta t_V} \delta {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\epsilon}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{S} {}^{t+\Delta t} dV = \int_{t+\Delta t_V} \delta \mathbf{u}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B {}^{t+\Delta t} dV + \int_{t+\Delta t_S} \delta \mathbf{u}^{ST} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S {}^{t+\Delta t} dS + \sum_i \delta \mathbf{u}^{iT} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^i \quad (3.3)$$

Die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  in (3.1) müssen die wesentlichen (geometrischen) Randbedingungen erfüllen. Daher werden in der Gleichung (3.3) nur solche Variationen der Verschiebungen und der entsprechenden Verzerrungen zugelassen, die die geometrischen Randbedingungen befriedigen. Ersetzt man zulässigerweise die Variation der Größen durch die virtuellen Größen

$$\delta {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\epsilon} = {}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad \delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \delta \mathbf{u}^S = \bar{\mathbf{u}}^S \quad \delta \mathbf{u}^i = \bar{\mathbf{u}}^i$$

erhält man das zu (3.3) identische Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Dieses Prinzip besagt: Befindet sich ein Körper im Gleichgewicht, ist für einen beliebigen, kompatiblen, kleinen, virtuellen, auf den Körper einwirkenden Verschiebungszustand die gesamte innere virtuelle Arbeit gleich der gesamten äußeren virtuellen Arbeit, d.h. es ist

$$\int_{t+\Delta t_V} {}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{S} {}^{t+\Delta t} dV = \int_{t+\Delta t_V} \bar{\mathbf{u}}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B {}^{t+\Delta t} dV + \int_{t+\Delta t_S} \bar{\mathbf{u}}^{ST} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S {}^{t+\Delta t} dS + \sum_i \bar{\mathbf{u}}^{iT} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^i \quad (3.4)$$

Die innere virtuelle Arbeit auf der linken Seite der Gleichung (3.4) ist die Arbeit, die der Vektor der aktuellen zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S}^T = [{}^{t+\Delta t} S_{11} \quad {}^{t+\Delta t} S_{22} \quad {}^{t+\Delta t} S_{33} \quad {}^{t+\Delta t} S_{12} \quad {}^{t+\Delta t} S_{23} \quad {}^{t+\Delta t} S_{13}]$$

entlang der kartesischen Komponenten des virtuellen Green-Lagrangeschen Verzerrungsvektors

$${}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T = [{}^{t+\Delta t} \bar{\epsilon}_{11} \quad {}^{t+\Delta t} \bar{\epsilon}_{22} \quad {}^{t+\Delta t} \bar{\epsilon}_{33} \quad {}^{t+\Delta t} \bar{\epsilon}_{12} \quad {}^{t+\Delta t} \bar{\epsilon}_{23} \quad {}^{t+\Delta t} \bar{\epsilon}_{13}]$$

leistet. Die äußere virtuelle Arbeit auf der rechten Seite der Gleichung (3.4) ist die Arbeit, die die aktuellen auf den Körper wirkenden Volumenkräfte  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B$ , Oberflächenspannungen  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S$  und Einzelkräfte  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^i$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} f_1^B \\ {}^{t+\Delta t} f_2^B \\ {}^{t+\Delta t} f_3^B \end{bmatrix}, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} f_1^S \\ {}^{t+\Delta t} f_2^S \\ {}^{t+\Delta t} f_3^S \end{bmatrix}, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^i = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} F_1^i \\ {}^{t+\Delta t} F_2^i \\ {}^{t+\Delta t} F_3^i \end{bmatrix}$$

an den virtuellen Verschiebungen zum betrachteten Zeitpunkt  $t + \Delta t$

$$\bar{\mathbf{u}}^T = [ \bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{u}_3 ]$$

leisten. Sind die Verschiebungen in (3.4) sehr klein und können Starrkörperbewegungen vernachlässigt werden, so kann der Zeitbezug in (3.4) entfallen und die innere virtuelle Arbeit mit Hilfe des Vektors der aktuellen Cauchy-schen Spannungen

$$\boldsymbol{\tau}^T = [ \tau_{11} \quad \tau_{22} \quad \tau_{33} \quad \tau_{12} \quad \tau_{23} \quad \tau_{31} ]$$

entlang der kartesischen Komponenten des klassischen infinitesimalen virtuellen Verzerrungsvektors

$$\bar{\mathbf{e}}^T = [ \bar{e}_{11} \quad \bar{e}_{22} \quad \bar{e}_{33} \quad \bar{e}_{12} \quad \bar{e}_{23} \quad \bar{e}_{13} ]$$

gebildet werden. Gleichung (3.4) vereinfacht sich somit zu

$$\int_V \bar{\mathbf{e}}^T \boldsymbol{\tau} dV = \int_V \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}^B dV + \int_S \bar{\mathbf{u}}^{sT} \mathbf{f}^S dS + \sum_i \bar{\mathbf{u}}^{iT} \mathbf{F}^i \quad (3.5)$$

Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen können sehr effektiv die Finite-Elemente-Gleichungen aufgestellt werden.

### 3.2.2 Finite Elemente in der linearen Strukturmechanik

Innerhalb der Methode der finiten Elemente wird der kontinuierliche Körper näherungsweise als eine Gruppierung diskreter finiter Elemente dargestellt, die nur in den Knotenpunkten der Elementränder miteinander verbunden sind. Die Verschiebungen innerhalb eines jeden Elementes werden als Funktionen der Verschiebungen der  $N$  Knotenpunkte der finiten Elemente angenommen. Damit gilt für ein  $m$ -tes Element

$$\mathbf{u}^{(m)}(x_i) = \mathbf{H}^{(m)}(x_i) \mathbf{U} \quad (3.6)$$

Dabei ist  $\mathbf{H}^{(m)}$  die Verschiebungsinterpolationsmatrix und  $\mathbf{U}$  der Vektor der Knotenpunktverschiebungen

$$\mathbf{U}^T = [ U_1^1 \quad U_2^1 \quad \dots \quad U_6^N ] \quad (3.7)$$

Die Verschiebungen im Inneren eines bestimmten Elementes hängen nur von den Verschiebungen und Verdrehungen der entsprechenden Knoten dieses Elementes ab. Mit der Verschiebungsannahme (3.6) können die entsprechenden Element-Verzerrungen ermittelt werden:

$$\mathbf{e}^{(m)}(x_i) = \mathbf{B}^{(m)}(x_i) \mathbf{U} \quad (3.8)$$

Dabei sind  $\mathbf{B}^{(m)}$  die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix, die man durch Differentiation der Matrix  $\mathbf{H}^{(m)}$  erhält. Die Spannungen in einem finiten Element ergeben sich durch

$$\boldsymbol{\tau}^{(m)} = \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{e}^{(m)} + \boldsymbol{\tau}_I^{(m)} \quad (3.9)$$

Dabei sind  $\boldsymbol{\tau}_I^{(m)}$  die Anfangsspannungen. Das mit der Matrix  $\mathbf{C}^{(m)}$  bezeichnete Materialgesetz kann isotrop oder anisotrop sein und sich von Element zu Element ändern. Das Prinzip (3.5) kann als Summe von Integralausdrücken über das Volumen und die Flächen aller  $m = 1, 2, \dots, k$  Elemente der Gruppierung

$$\begin{aligned} \sum_k \int_{V^{(m)}} \bar{\mathbf{e}}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{(m)} dV^{(m)} &= \sum_k \int_{V^{(m)}} \bar{\mathbf{U}}^{(m)T} \mathbf{f}^{B^{(m)}} dV^{(m)} + \\ &\quad \sum_k \int_{S^{(m)}} \bar{\mathbf{U}}^{S^{(m)T}} \mathbf{f}^{S^{(m)}} dS^{(m)} + \sum_i \bar{\mathbf{U}}^i T \mathbf{F}^i \end{aligned} \quad (3.10)$$

geschrieben werden. Mit den Beziehungen (3.6) bis (3.9) für die Verschiebungen, Spannungen und Verzerrungen der einzelnen Elemente lautet (3.10) dann

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}^T \left[ \sum_k \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \right] \mathbf{U} &= \\ \bar{\mathbf{U}}^T \left[ \left\{ \sum_k \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{B^{(m)}} dV^{(m)} \right\} + \left\{ \sum_k \int_{S^{(m)}} \mathbf{H}^{S^{(m)T}} \mathbf{f}^{S^{(m)}} dS^{(m)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \sum_k \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}_I^{(m)} dV^{(m)} \right\} + \mathbf{F} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hierbei sind  $\mathbf{H}^{S^{(m)}}$  die Interpolationsmatrix für die Oberflächenverschiebung und  $\mathbf{F}$  der Vektor der äußeren Einzelkräfte. Der Knotenpunktverschiebungsvektor  $\mathbf{U}$  der Elementgruppierung ist unabhängig vom jeweils betrachteten Element und kann deshalb vor die Summation gezogen werden. Für den Vektor der virtuellen Knotenpunktverschiebungen  $\bar{\mathbf{U}}$  kann jeder beliebige, gedachte, differenziell kleine, aber physikalisch mögliche Zustand angenommen werden. Unter der Annahme, dass alle Verschiebungskomponenten nacheinander virtuelle Einheitsverschiebungen sind, entspricht die Matrix der virtuellen Knotenpunktverschiebungen der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$ . Damit entsteht aus der Beziehung (3.11) mit der Bezeichnung

$$\mathbf{K} = \sum_k \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)}}_{\mathbf{K}^{(m)}}$$

für die Systemsteifigkeitsmatrix der Elemente-Gruppierung und mit der Bezeichnung

$$\mathbf{R}_B = \sum_k \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{B^{(m)}} dV^{(m)}}_{\mathbf{R}_B^{(m)}}$$

für die Volumenkräfte und mit

$$\mathbf{R}_S = \sum_k \underbrace{\int_{S^{(m)}} \mathbf{H}^{S^{(m)T}} \mathbf{f}^{S^{(m)}} dS^{(m)}}_{\mathbf{R}_S^{(m)}}$$

für die Oberflächenkräfte und mit den Anfangsspannungen

$$\mathbf{R}_I = \sum_k \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}_I^{(m)} dV^{(m)}}_{\mathbf{R}_I^{(m)}}$$

die Gleichgewichtsbeziehung der Elemente-Gruppierung

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (3.12)$$

mit dem Lastvektor

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_I$$

Die Gleichung (3.12) beschreibt das statische Gleichgewicht der Elemente-Gruppierung.

### 3.2.3 Lagrangesche Formulierung der Bewegungsgleichung

In den Lagrangeschen inkrementellen Verfahren (siehe u.a. [Bathe \(1996\)](#) und [Ramm \(1976\)](#)) wird das Gleichgewicht des Körpers in einer Konfiguration zur Zeit  $t + \Delta t$  mit Hilfe des Prinzips (3.5) ausgedrückt. Ersetzt man die virtuellen Größen durch die Variation dieser Größen

$$\bar{\mathbf{e}} = \delta \mathbf{e}, \quad \bar{\mathbf{U}} = \delta \mathbf{U}, \quad \bar{\mathbf{U}}^S = \delta \mathbf{U}^S, \quad \bar{\mathbf{U}}^i = \delta \mathbf{U}^i$$

kann das Prinzip (3.5) in Tensornotation geschrieben werden als

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} e_{ij} {}^{t+\Delta t} dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.13)$$

mit der äußeren virtuellen Arbeit

$${}^{t+\Delta t} R = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i {}^{t+\Delta t} dV + \int_{t+\Delta t S} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S {}^{t+\Delta t} dS \quad (3.14)$$



Dabei bedeuten die  ${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$  die kartesischen Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors im Zustand zur Zeit  $t + \Delta t$  und

$$\delta_{t+\Delta t}e_{ij} = \frac{1}{2}\delta({}_{t+\Delta t}u_{i,j} + {}_{t+\Delta t}u_{j,i})$$

die kartesischen Komponenten des infinitesimalen Verzerrungstensors mit den inkrementellen Zuwächsen der Verschiebungen

$$u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^tu_i$$

bzw.

$$u_i = {}^{t+\Delta t}x_i - {}^tx_i \quad (3.15)$$

und ihren partiellen Ableitungen nach den Koordinaten zur Zeit  $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t}u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j}$$

Analog ergibt sich für die Elementverschiebungen zur Zeit  $t$

$${}^tu_i = {}^tx_i - {}^0x_i \quad (3.16)$$

Die Koordinaten eines allgemeinen Punktes in einem Körper ergeben sich zur Zeit  $t + \Delta t$  zu

$${}^{t+\Delta t}x_i = {}^0x_i + {}^tu_i + u_i$$

Die Gleichung (3.13), die alle Gleichgewichts- und Kompatibilitätsbedingungen für einen allgemeinen Körper in der Konfiguration für die Zeit  $t + \Delta t$  enthält, läßt sich nicht direkt lösen, da im Unterschied zu linearen Berechnungen, in denen infinitesimal kleine Verschiebungen angenommen werden, die Konfiguration des Körpers zur Zeit  $t + \Delta t$  nicht bekannt ist. Eine linearisierte Näherungslösung existiert, wenn alle Variablen auf die zuvor berechnete, d.h. bekannte Gleichgewichtskonfiguration bezogen werden. Die dehnungslosen Starrkörperbewegungen werden im Allgemeinen durch die Einführung des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$${}^t_0S_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}^0x_{i,m} {}^t\tau_{mn} {}^0x_{j,n} \quad (3.17)$$

und durch die Einführung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors

$${}^t_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}^tu_{i,j} + {}^tu_{j,i} + {}^tu_{k,i} {}^tu_{k,j}) \quad (3.18)$$

behandelt. Beide Tensoren sind bekanntlich invariant gegenüber Starrkörperbewegungen. Es kann gezeigt werden (vgl. [Bathe \(1996\)](#)), dass

$$\int_{{}^0V} {}^t_0S_{ij} \delta {}^t_0\epsilon_{ij} {}^0dV = \int_{{}^0V} \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}^t\tau_{mn} \delta {}^te_{mn} {}^0dV \quad (3.19)$$

gilt. Diese Beziehung (3.19) bildet die Grundlage der inkrementellen Lagrangeschen Formulierung. Bei der Verwendung von (3.19) entsteht aus (3.13) in der totalen (und nur diese soll hier betrachtet werden) Lagrangeschen Formulierung die Bewegungsgleichung

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} {}^0dV = {}^{t+\Delta t}R \quad (3.20)$$

mit

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho} {}^{t+\Delta t}x_{i,m} {}^{t+\Delta t}\tau_{mn} {}^{t+\Delta t}x_{j,n}$$

und

$$\delta {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta ({}^{t+\Delta t}u_{i,j} + {}^{t+\Delta t}u_{j,i} + {}^{t+\Delta t}u_{k,i} {}^{t+\Delta t}u_{k,j}))$$

Die Bewegungsgleichung lautet mit der inkrementellen Zerlegung für die Spannungen

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^tS_{ij} + {}_0S_{ij}$$

und der inkrementellen Zerlegung der Verzerrungen

$$\delta {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} = {}^t\delta\epsilon_{ij} + {}_0\delta\epsilon_{ij}$$

in lineare und nichtlineare Verzerrungsinkremente

$${}_0\delta\epsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij}$$

und unter Berücksichtigung von  $\delta {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} = \delta {}_0\epsilon_{ij}$

$$\int_{0V} {}_0S_{ij} \delta {}_0\epsilon_{ij} {}^0dV + \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} {}^0dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV$$

mit den linearen

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}^tu_{k,i} {}_0u_{k,j} + {}^tu_{k,i} {}^tu_{k,j}) \quad (3.21)$$

und den nichtlinearen

$${}_0\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} \quad (3.22)$$

Verzerrungsinkrementen. Durch die Verwendung der Näherungen

$${}_0S_{ij} = {}^tC_{ijrs} {}_0e_{rs} \approx {}^tC_{ijrs} {}_0e_{rs}$$

wobei  ${}^tC_{ijrs}$  der inkrementelle Materialeigenschaftstensor zur Zeit  $t$  bezogen auf die Konfiguration zur Zeit 0 ist und  $\delta {}_0\epsilon_{ij} \approx \delta {}_0e_{ij}$ , erhält man schließlich die linearisierte inkrementelle Bewegungsgleichung

$$\int_{0V} {}^tC_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV + \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} {}^0dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV \quad (3.23)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass im Gegensatz zu einer linearen Rechnung die linearen Verzerrungsinkremente  ${}_0e_{ij}$  Anfangsverzerrungen  ${}_0^t u_{i,k}$  infolge der Verschiebungen zur Zeit  $t$  bezogen auf die Ausgangsgeometrie aufweisen.

Die Beziehung (3.23) kann dazu verwendet werden, den Verschiebungszuwachs  $u_i$  zu berechnen, der benutzt wird, um Näherungen für die Verschiebungen  ${}^{t+\Delta t}u_i$ , Verzerrungen  ${}^{t+\Delta t}{}_0\epsilon_{ij}$  und die Spannungen  ${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij}$  zur Zeit  $t + \Delta t$  zu ermitteln. Die Verschiebungsnäherung zur Zeit  $t + \Delta t$  erhält man durch Addition der berechneten Inkremente zu den Verschiebungen zur Zeit  $t$

$${}^{t+\Delta t}u_i = {}^t u_i + u_i$$

Durch die Linearisierung der Bewegungsgleichung ergibt sich im Allgemeinen eine Differenz zwischen der berechneten inneren und äußeren Arbeit zur Zeit  $t + \Delta t$

$$\Delta = {}^{t+\Delta t}R - \int_{0V} {}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}{}_0\epsilon_{ij} {}^0dV$$

so dass eine iterative Verbesserung der Näherungswerte so lange erforderlich wird, bis der Fehler kleiner als ein vorgegebenes Konvergenzmaß ist. Die für  $k = 1, 2, 3, \dots$  iterativ zu lösende Gleichung ist dann

$$\begin{aligned} \int_{0V} {}^t{}_0C_{ijrs}^{(k-1)} \Delta {}_0e_{rs}^{(k)} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV + \int_{0V} {}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij}^{(k-1)} \delta \Delta {}_0\eta_{ij}^{(k)} {}^0dV \\ = {}^{t+\Delta t}R - \int_{0V} {}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij}^{(k-1)} \delta {}^{t+\Delta t}{}_0\epsilon_{ij}^{(k-1)} {}^0dV \end{aligned} \quad (3.24)$$

Wird die Iteration ohne eine Umformung der Komponenten des Materialtensors und des Spannungstensors auf der linken Seite durchgeführt, entsteht die folgende Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{0V} {}^t{}_0C_{ijrs} \Delta {}_0e_{rs}^{(k)} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV + \int_{0V} {}^t{}_0S_{ij} \delta \Delta {}_0\eta_{ij}^{(k)} {}^0dV \\ = {}^{t+\Delta t}R - \int_{0V} {}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij}^{(k-1)} \delta {}^{t+\Delta t}{}_0\epsilon_{ij}^{(k-1)} {}^0dV \end{aligned} \quad (3.25)$$

was einer modifizierten Newtonschen Iteration unter Verwendung einer konstanten Tangenten-Steifigkeitsmatrix entspricht. Die Verschiebungen errechnen sich zu

$${}^{t+\Delta t}u_i^{(k)} = {}^t u_i^{(k-1)} + \Delta u_i^{(k)} ; \quad {}^{t+\Delta t}u_i^{(0)} = {}^t u_i$$

Ist die Belastung unabhängig von der Deformation, so vereinfacht sich der Ausdruck (3.14) zu

$${}^{t+\Delta t}R = \int_{0V} {}^{t+\Delta t}{}_0f_i^B \delta u_i {}^0dV + \int_{0S} {}^{t+\Delta t}{}_0f_i^S \delta u_i^S {}^0dS \quad (3.26)$$

Die Gleichungen (3.24) und (3.25) beschreiben alle nichtlinearen Effekte infolge großer Verschiebungen, großer Verdrehungen und Nichtlinearitäten des

Materials. Sollen ausschließlich nichtlineare Effekte des Materials berücksichtigt werden, so können die nichtlinearen Verzerrungskomponenten und alle Umformungen der Oberflächen und Volumina vernachlässigt werden. Dadurch reduzieren sich Gleichung (3.24) zu

$$\int_V {}^t_0 C_{ijrs}^{(k-1)} \Delta e_{rs}^{(k)} \delta e_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} R - \int_V {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}^{(k-1)} \delta e_{ij} dV \quad (3.27)$$

und Gleichung (3.25) zu

$$\int_V {}^t_0 C_{ijrs} \Delta e_{rs}^{(k)} \delta e_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} R - \int_V {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}^{(k-1)} \delta e_{ij} dV \quad (3.28)$$

wobei  ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}^{(k-1)}$  die aktuelle physikalische Spannung zur Zeit  $t + \Delta t$  im Iterationsschritt  $(k - 1)$  ist, da das Volumen des Körpers sich nicht ändert, d.h.

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} = {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}$$

Im Falle der Verwendung eines linear elastischen Materials sind die Gleichungen (3.27) und (3.28) mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebung (3.13) identisch.

### 3.2.4 Finite Elemente in der nichtlinearen Strukturmechanik

Für ein einzelnes Element können die grundlegenden Integrale der Gleichungen (3.24) bis (3.28) in entsprechenden Matrixauswertungen (siehe Tabelle 3.2) geschrieben werden. Die Matrizen und Vektoren zu einem Zeitpunkt  $t + \Delta t$  und einem Iterationsschritt  $i$  werden analog berechnet. Insgesamt sind die Konventionen der Tabelle 3.1 verwendet worden.

Der Spannungsvektor ist festgelegt zu

$${}^t_0 \hat{\mathbf{S}}^T = [{}^t_0 S_{11} \quad {}^t_0 S_{22} \quad {}^t_0 S_{33} \quad {}^t_0 S_{12} \quad {}^t_0 S_{23} \quad {}^t_0 S_{13}] \quad (3.29)$$

Die Spannungsmatrix wird definiert durch

$${}^t_0 \mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^t_0 S_{11} \mathbf{I}_3 & {}^t_0 S_{12} \mathbf{I}_3 & {}^t_0 S_{13} \mathbf{I}_3 \\ & {}^t_0 S_{22} \mathbf{I}_3 & {}^t_0 S_{23} \mathbf{I}_3 \\ \text{sym.} & & {}^t_0 S_{33} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

wobei

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

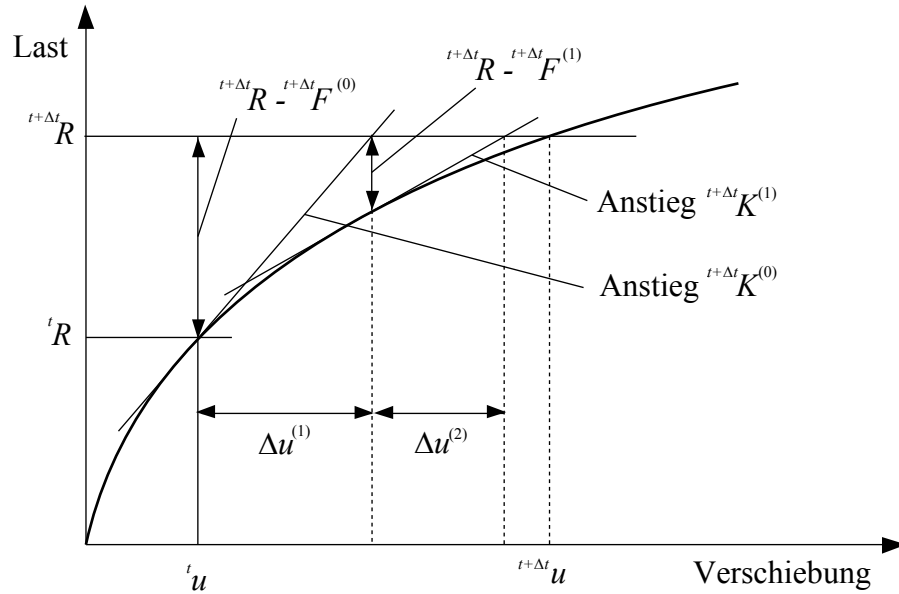


Abbildung 3.2: Newton-Raphson-Iteration für die Lösung eines Ein-Freiheitsgrad-Systems

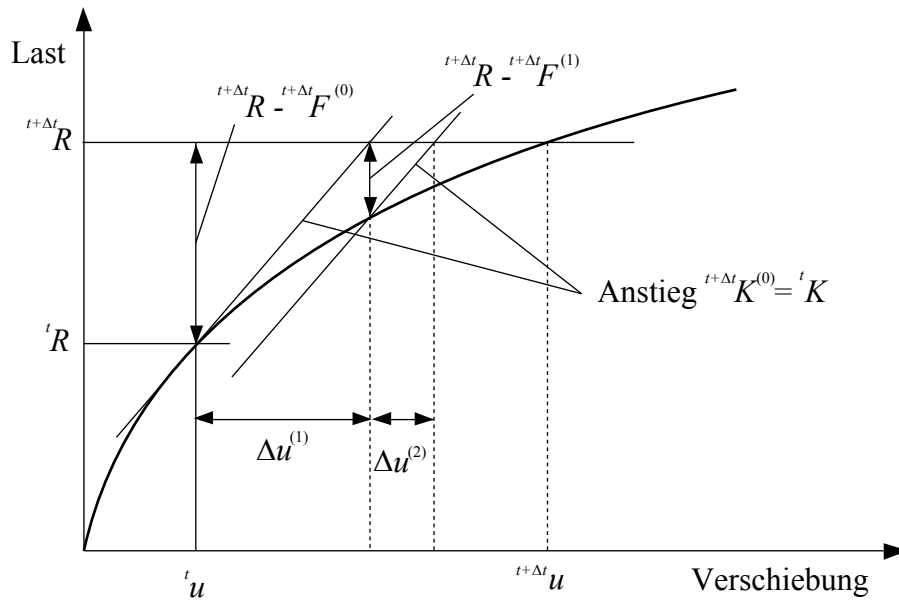


Abbildung 3.3: Modifizierte Newton-Raphson-Iteration für die Lösung eines Ein-Freiheitsgrad-Systems

---

$\mathbf{H}^S, \mathbf{H}$	=	Oberflächen- und Volumen-Verschiebungsinterpolationsmatrizen eines Elementes,
${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{f}^S, {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{f}^B$	=	Oberflächen- und Volumen-Kraftvektoren, die pro Flächeneinheit bzw. pro Volumeneinheit des Elementes zur Zeit 0 bestimmt sind,
$\mathbf{B}_L, {}^t_0 \mathbf{B}_L$	=	lineare Verzerrungs-Verschiebungsmatrizen; wobei $\mathbf{B}_L$ mit ${}^t_0 \mathbf{B}_L$ übereinstimmt, wenn der Anfangsverschiebungseffekt vernachlässigt wird,
${}^t_0 \mathbf{B}_{NL}$	=	nichtlineare Verzerrungs-Verschiebungsmatrix,
${}^t_0 \mathbf{S}, {}^t_0 \hat{\mathbf{S}}$	=	Matrix und Vektor der zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen,
${}^t_0 \hat{\mathbf{\Sigma}}$	=	Vektor der Spannungen in nur physikalisch nichtlinearen Berechnungen,
${}^t_0 \mathbf{C}$	=	inkrementelle Spannungs-Verzerrungs-Materialeigenschaftsmatrix zur Zeit $t$ bezogen auf die Konfiguration zur Zeit 0,
$\hat{\mathbf{u}}$	=	Knotenpunkt-Verschiebungen in kartesischen Koordinaten des betrachteten Elements.

---

Tabelle 3.1: Elementmatrizen und -vektoren

ist.

Bekanntlich genügt die Betrachtung eines einzigen Elementes eines spezifischen Typs, da sich die beherrschenden Gleichgewichtsbedingungen einer Elemente-Gruppierung mit Hilfe der sogenannten direkten Steifigkeitsmethode aufstellen lassen. Die Diskretisierung der Gleichungen (3.24) und (3.26) führt dann zur Matrizengleichung

$$\left( {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{K}_L^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{K}_{NL}^{(i-1)} \right) \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{F}^{(i-1)} \quad (3.31)$$

Entsprechend ist die Matrizengleichung der Beziehungen (3.25) und (3.26)

$$\left( {}^t_0 \mathbf{K}_L + {}^t_0 \mathbf{K}_{NL} \right) \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{F}^{(i-1)} \quad (3.32)$$

Die Bilder 3.2 und 3.3 veranschaulichen diese Beziehungen für die Lösung eines Ein-Freiheitsgrad-Systems. Analog erhält man für die Diskretisierung der nur physikalisch nichtlinearen Formulierung (3.27)

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)}$$

bzw. (3.28)

$${}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)}$$

Darin bedeuten

- ${}^t_0\mathbf{K}_L$  = inkrementelle Steifigkeitsmatrix für die linearen Verzerrungsanteile, die den Anfangsverschiebungseffekt enthält,  
 ${}^t_0\mathbf{K}_{NL}$  = inkrementelle Steifigkeitsmatrix für die nichtlinearen Verzerrungsanteile (infolge Geometrieänderung und Anfangsspannungen),  
 ${}^t\mathbf{K}$  = inkrementelle Steifigkeitsmatrix für die linearen Verzerrungsanteile, ohne Anfangsverschiebungseffekt,  
 ${}^t\mathbf{R}$  = Vektor der äußeren Knotenpunktlasten zur Zeit  $t + \Delta t$ ,  
 ${}^t\mathbf{F}$  = Vektor der Knotenpunktkräfte, die den Elementspannungen äquivalent sind,  
 $\Delta\mathbf{U}^{(i)}$  = Vektor der Inkremente der Knotenpunkt-Verschiebungen im Iterationsschritt  $(i)$ ; wobei allgemein  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i)}$  und für  $i = 1$ :  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(1)} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(1)}$  und für  $i = 0$ :  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}$  und desweiteren  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}$  gilt.

### 3.2.5 Spannungs-Verzerrungs-Materialverhalten

#### Elastisches Materialverhalten

Die Berechnung der zu einem Zeitpunkt  $t$  aktuellen zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen erfolgt für große Verschiebungen und Drehungen, kleine Verzerrungen und elastisches Materialverhalten mit Hilfe der Gleichung

$${}^t_0S_{ij} = C_{ijrs} {}^t_0\epsilon_{rs} \quad (3.33)$$

Dabei sind

$$C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{rs})$$

die Komponenten des konstanten Elastizitätstensors, wobei

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

die Laméschen Konstanten sind und

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ 1 & : i = j \end{cases}$$

das Kroneckersymbol ist. Die Darstellungsmatrix des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors ergibt sich aus

$${}^t_0\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} {}^t_0\epsilon_{11} & {}^t_0\epsilon_{12} & {}^t_0\epsilon_{13} \\ & {}^t_0\epsilon_{22} & {}^t_0\epsilon_{23} \\ sym. & & {}^t_0\epsilon_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}({}^t_0\mathbf{A} + {}^t_0\mathbf{A}^T + {}^t_0\mathbf{A}^T {}^t_0\mathbf{A})$$

Integral	Matrixauswertung
${}^{t+\Delta t}R = \int_{{}_0V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i^0 dV +$	${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = \int_{{}_0V} \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^B {}^0dV +$
$\int_{{}_0S} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^0 dS$	$\int_{{}_0S} \mathbf{H}^{ST} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^S {}^0dS$
$\int_{{}_0V} {}^tC_{ijrs} e_{rs} \delta e_{ij} {}^0dV$	${}^t\mathbf{K}_L \hat{\mathbf{u}} = \left( \int_{{}_0V} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\mathbf{C} {}^t\mathbf{B}_L {}^0dV \right) \hat{\mathbf{u}}$
$\int_{{}_0V} {}^tS_{ij} \delta_0 \eta_{ij} {}^0dV$	${}^t\mathbf{K}_{NL} \hat{\mathbf{u}} = \left( \int_{{}_0V} {}^t\mathbf{B}_{NL}^T {}^t\mathbf{S} {}^t\mathbf{B}_{NL} {}^0dV \right) \hat{\mathbf{u}}$
$\int_{{}_0V} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij} {}^0dV$	${}^t\mathbf{F} = \left( \int_{{}_0V} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\hat{\mathbf{S}} {}^0dV \right)$
$\int_V {}^tC_{ijrs} e_{rs} \delta e_{ij} dV$	${}^t\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \left( \int_V \mathbf{B}_L^T {}^t\mathbf{C} \mathbf{B}_L dV \right) \hat{\mathbf{u}}$
$\int_V {}^t\sigma_{ij} \delta e_{ij} dV$	${}^t\mathbf{F} = \left( \int_V \mathbf{B}_L^T {}^t\hat{\boldsymbol{\Sigma}} dV \right)$

Tabelle 3.2: Finite-Elemente-Matrizen

mit

$${}^t_0\mathbf{A} = \begin{bmatrix} {}^tu_{1,1} & {}^tu_{1,2} & {}^tu_{1,3} \\ {}^tu_{2,1} & {}^tu_{2,2} & {}^tu_{2,3} \\ {}^tu_{3,1} & {}^tu_{3,2} & {}^tu_{3,3} \end{bmatrix}$$

Die zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen allerdings besitzen kaum eine physikalische Bedeutung, so dass in der Praxis letztlich Cauchysche Spannungen

$${}^t\tau_{mn} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}^0x_{m,i} {}^tS_{ij} {}^0x_{n,j}$$



berechnet werden müssen. Darin ist  ${}^0_t x_{m,i}$  das  $(m, i)$ -Element des Deformationsgradienten

$${}^t_0 \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^t x_1}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial^t x_1}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial^t x_1}{\partial {}^0 x_3} \\ \frac{\partial^t x_2}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial^t x_2}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial^t x_2}{\partial {}^0 x_3} \\ \frac{\partial^t x_3}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial^t x_3}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial^t x_3}{\partial {}^0 x_3} \end{bmatrix}$$

Das Verhältnis der Massendichten lässt sich angeben durch (siehe z.B. [Bathe \(1996\)](#))

$${}^0\rho = {}^t\rho \det {}^t_0 \mathbf{X}$$

### Elastisch-plastisches Materialverhalten

Im Gegensatz zum elastischen Materialverhalten, bei dem die Gesamtspannung allein aus der Gesamtverzerrung entsprechend der Gleichung (3.33) errechnet werden kann, hängt bei einer elastisch-plastischen Strukturantwort die Gesamtspannung zur Zeit  $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t}_0 S_{ij} = {}^t_0 S_{ij} + {}_0 S_{ij} \quad (3.34)$$

zusätzlich von der Spannungs- und Verzerrungsgeschichte ab. Das Spannungsinkrement  ${}_0 S_{ij}$  ist gegeben durch

$${}_0 S_{ij} = \int_{{}^t_0 S_{ij}}^{t+\Delta t}_0 S_{ij} d_0 S_{ij}$$

mit den differentiellen Zuwächsen der Spannungen

$$d_0 S_{ij} = C_{ijrs} (d_0 \epsilon_{rs} - d_0 \epsilon_{rs}^p) \quad (3.35)$$

Da die differentiellen Zuwächse der plastischen Verzerrungen als die zu einer vorgegebenen Fließfläche  ${}^t f_y({}^t_0 S_{ij}, {}^t_0 \epsilon_{ij}^p, \dots)$  normalen Spannungskomponenten interpretiert werden können, lassen sich diese aus der Normalitätsbedingung

$$d_0 \epsilon_{ij}^p = {}^t\beta \frac{\partial {}^t f_y}{\partial {}^t_0 S_{ij}} \quad (3.36)$$

in Abhängigkeit eines noch zu bestimmenden Faktors  ${}^t\beta$  angeben. Bild 3.4 illustriert geometrisch die Berechnung der Spannung zur Zeit  $t + \Delta t$  für elastisch-plastisches Materialverhalten. Spannungszustände außerhalb der Fließfläche existieren nicht, wenn gefordert wird:

$${}^t f_y \leq 0 ; \quad {}^t f_y + d^t f_y \leq 0 \quad (3.37)$$

mit dem totalen Differential

$$d^t f_y = \frac{\partial^t f_y}{\partial^t S_{ij}} d^t S_{ij} + \frac{\partial^t f_y}{\partial^t \epsilon_{ij}^p} d^t \epsilon_{ij}^p + \dots$$

Dabei steht “...” für weitere beschreibende Materialparameter, wie Fließspannung, Verfestigungsmodul usw. Für eine Überführung in eine Matrixschreibweise seien die Abkürzungen

$${}^t_0 q_{ij} = \frac{\partial^t f_y}{\partial^t S_{ij}} ; {}^t_0 p_{ij} = -\frac{\partial^t f_y}{\partial^t \epsilon_{ij}^p}$$

und schließlich

$${}^t_0 \mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} {}^t_0 q_{11} & {}^t_0 q_{22} & {}^t_0 q_{33} & 2^t_0 q_{12} & 2^t_0 q_{23} & 2^t_0 q_{31} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$${}^t_0 \mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} {}^t_0 p_{11} & {}^t_0 p_{22} & {}^t_0 p_{33} & 2^t_0 p_{12} & 2^t_0 p_{23} & 2^t_0 p_{31} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

eingeführt. Aus den Bedingungen (3.36) und (3.37) und der Gleichung (3.35) erhält man mit den Beziehungen (3.39) den Faktor  ${}^t\beta$  als

$${}^t\beta = \frac{{}^t_0 \mathbf{q}^T \mathbf{C} d_0 \epsilon}{{}^t_0 \mathbf{p}^T {}^t_0 \mathbf{q} + {}^t_0 \mathbf{q}^T \mathbf{C} {}^t_0 \mathbf{q}} \quad (3.40)$$

Damit ergibt sich durch ein Einsetzen von (3.36) und (3.40) in (3.35) für den Vektor der differentiellen Zuwächse der Spannungen

$$d_0 \mathbf{S} = {}^t \mathbf{C}^{EP} d_0 \epsilon$$

wobei

$${}^t_0 \mathbf{C}^{EP} = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} {}^t_0 \mathbf{q} (\mathbf{C} {}^t_0 \mathbf{q})^T}{{}^t_0 \mathbf{p}^T {}^t_0 \mathbf{q} + {}^t_0 \mathbf{q}^T \mathbf{C} {}^t_0 \mathbf{q}}$$

die tangentielle elastisch-plastische Spannungs-Verzerrungs-Matrix zum Zeitpunkt  $t$  darstellt. Damit erhält man die Gesamtspannung in der Gleichung (3.34) zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  aus

$${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{S} = {}^t_0 \mathbf{S} + \int_{{}^t_0 \epsilon}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{C}^{EP} d_0 \epsilon$$

Allerdings stellt diese Gleichung wegen der Linearisierung der Bewegungsgleichung (3.23) in physikalisch und geometrisch nichtlinearen Berechnungen nur eine Näherung für die Spannungen dar. Wie beim Übergang der Gleichung (3.23) zur Gleichung (3.24) sind auch hier Gleichgewichtssiterationen notwendig, um die exakten Spannungen zu erhalten:

$${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{S}^{(k-1)} = {}^t_0 \mathbf{S} + \int_{{}^t_0 \epsilon}^{t+\Delta t}_0 \epsilon^{(k-1)} \mathbf{C}^{EP} d_0 \epsilon \quad (3.41)$$

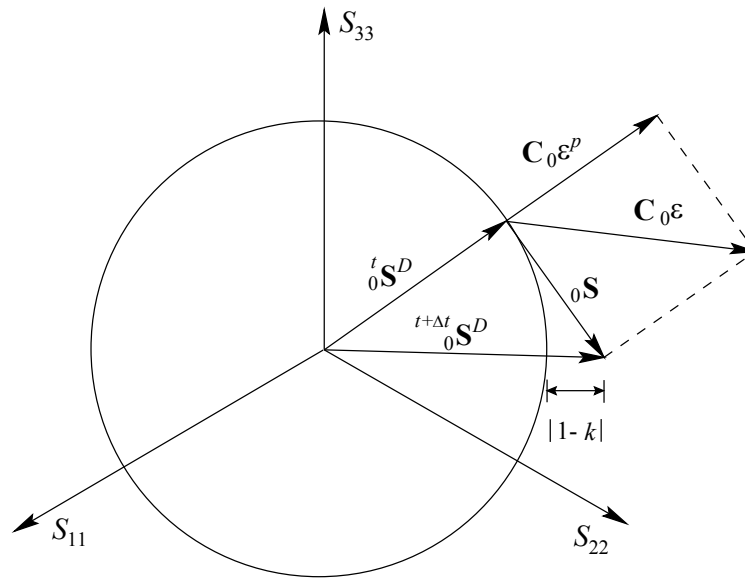


Abbildung 3.4: Geometrische Darstellung der Spannungsberechnung im Hauptspannungsraum und normal zur Äquisektrix.

Das bedeutet, dass während jeder Gleichgewichtsiteration auch eine Integration der Spannungen durchgeführt werden muss. Für eine Integration der zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen entsprechend der Gleichung (3.41) stehen grundsätzlich zahlreiche Integrationsmethoden wie z.B. das Runge-Kutta-Verfahren zur Verfügung. Immer ist aber letztlich eine Überprüfung und Rückführung der Spannungen  ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{S}$  auf die Fließfunktion  ${}^{t+\Delta t}f_y$  notwendig. Wird beispielsweise die von Misessche Fließfläche

$${}^t f_y = \frac{1}{2} {}^t S_{ij}^D {}^t S_{ij}^D - \frac{1}{3} {}^t \sigma_y^2$$

mit dem Spannungsdeviator

$${}^t_0S^D_{ij} = {}^t_0S_{ij} - \frac{{}^t_0S_{mm}}{3} \delta_{ij}$$

verwendet, wobei  ${}^t\sigma_y$  die Fließspannung zur Zeit  $t$  ist, entsteht im Allgemeinen eine Abweichung

$$|1 - k| = \left| 1 - \frac{\frac{1}{3} t + \Delta t \sigma_y^2}{\frac{1}{2} t + \Delta t {}_0 S_{ij}^D \quad t + \Delta t {}_0 S_{ij}^D} \right| \leq \epsilon \quad (3.42)$$

Die Spannungsdeviatoren müssen demnach anschließend entsprechend auf die Fließfläche zurück skaliert werden. Ist die Abweichung der Spannungsdeviatoren  $|1 - k| > \epsilon$ , so ist das aktuelle Lastinkrement zu verringern (vgl. Abschnitt 3.4).

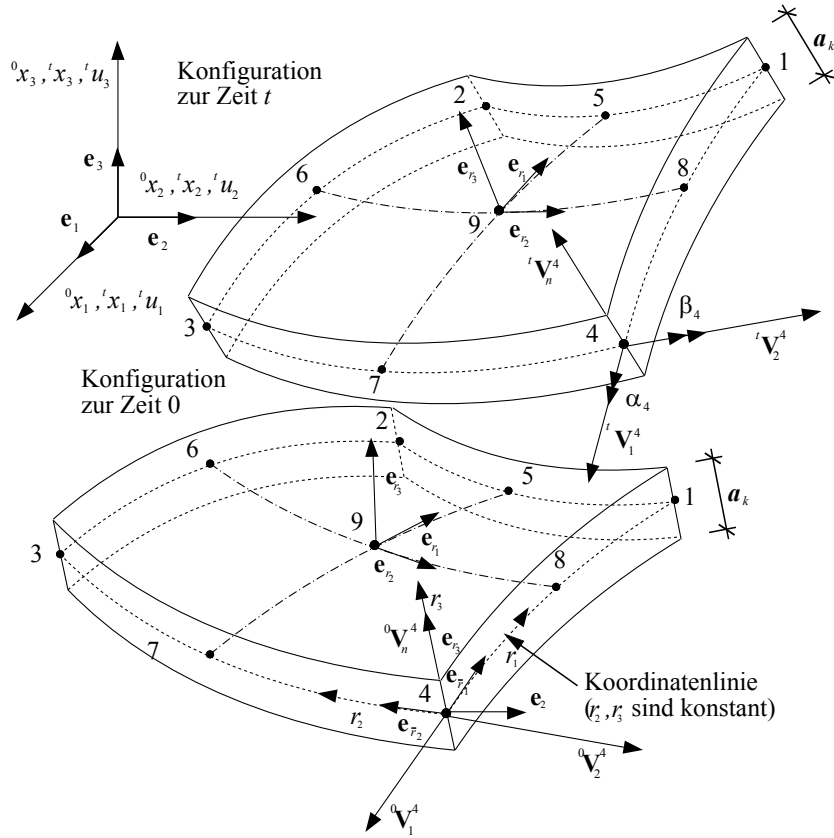


Abbildung 3.5: 9-Knoten-Schalenelement für große Verschiebungen und Verdrehungen

### 3.3 Das isoparametrische degenerierte Schalenelement SHELL9N

In dieser Arbeit soll u.a. die Anwendbarkeit der im Kapitel 4 entwickelten Verfahren zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Strukturen mit geometrisch nichtlinearem Verhalten demonstriert werden. Deshalb wurde das folgende geometrisch nichtlineare Schalenelement auf der Basis von Ahmad u. a. (1970); Bathe (1996); Dvorkin und Bathe (1984); Hughes und Liu (1980); Parisch (1979); Ramm (1976) weiterentwickelt. Mit diesem finiten Element ist ein Anwendungsbeispiel untersucht worden. In einer isoparametrischen Formulierung (siehe dazu Anhang A) kann das Schalenelement für eine variable Knotenzahl formuliert werden. Bild 3.5 zeigt ein 9-Knoten-Schalenelement.

Im Abschnitt A.2 wird auf einige numerische Schwierigkeiten bei der Definition eines lokalen Koordinatensystems in den Finite-Elemente-Knoten nach Bathe (1996) hingewiesen. Durch eine alternative Festlegung des Koordinatensystems nach Gleichung (A.15) kann das finite Schalenelement auch in

der Stabilitätsanalyse und in geometrisch nichtlinearen Berechnungen angewendet werden.

Die Element-Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^k$  der Gleichung (A.7) für einen Knoten  $k$  ist nach Bathe (1996) sowohl auf globale als auch auf lokale Knoten-Freiheitsgrade bezogen. Solange ausschließlich nur ein Finite-Elemente-Typ benutzt wird und eine Zuordnung der Knotenverdrehungen und der Rückstellmomente zu globalen Koordinatenachsen nicht erforderlich wird, ist eine derartige Formulierung vorteilhaft, da sie ohne eine weitere Transformation auskommt; andernfalls müssen die Submatrizen von  $\mathbf{K}^k$ , wie im Abschnitt A.4 beschrieben, transformiert werden.

## 3.4 Bestimmung von Grenzzuständen

### 3.4.1 Bisektion

Für die Suche der Grenzzustandspunkte des directional sampling (Abschnitt 2.7) und des Antwortflächenverfahrens (Kapitel 4) muss in jeder Richtung  $\mathbf{a}_i$  der Grenzzustand  $r^*$  ermittelt werden. Bei Grenzzuständen, die definiert sind durch Beschränkungen des Verschiebungs- oder des Spannungs- und Verzerrungszustandes oder bei Stabilitätsproblemen können die Grenzzustandspunkte durch eine Nullstellensuche für  $g(r^*(\mathbf{a}) \mathbf{a}) = 0$  gefunden werden. Bei allgemeinen nichtlinearen Problemstellungen können häufig nur Aussagen über Versagen oder Nichtversagen und keine Angaben über die jeweilige Größe von  $g(r(\mathbf{a}) \mathbf{a})$  gemacht werden, so dass in diesen Fällen der Grenzzustandspunkt durch inkrementelle Laststeigerungen und Intervallschachtelung gefunden werden muss. Dies allerdings ist auch bei den Simulationsverfahren der Abschnitte 2.4 und 2.5 notwendig. Somit ist der zusätzliche Aufwand, die Grenzzustandspunkte durch Bisektion zu finden, nicht wesentlich. Wodurch die Verfahren des directional sampling und des Antwortflächenverfahrens insbesondere für die Analyse nichtlinearer statisch belasteter Strukturen geeignet sind.

In den linearisierten Bewegungsgleichungen (3.31) und (3.32) wurde die Zeit  $t$  als eine bequeme Beschreibungsmöglichkeit der Lastgeschichte und der Strukturkinematik eingeführt. In Bezug auf die Bestimmung von Grenzzustandspunkten für die Berechnung von Versagenswahrscheinlichkeiten ist es allerdings zweckmäßiger, stattdessen die jeweilige Größe der Realisation der Basisvariablen zur Festlegung der aktuellen Parameter wie Lastinkremente und Geometriezustände zu benutzen:

$$\mathbf{x}^j \mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{x}^j \mathbf{R} - \mathbf{x}^j \mathbf{F}^{(i-1)}; \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (3.43)$$

Eine Realisierung des Vektors der Basisvariablen  $\mathbf{x}^j$  errechnet sich aus der Nataf-Rücktransformation (siehe Abschnitt 2.3 und Nataf (1982)) der unkorrelierten und standard-normalverteilten Zufallsvariablen  $\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{A}$  in den

Raum der Original-Zufallsvariablen  $\mathbf{X}$

$$x_k^j = F_{X_k}^{-1}(x_k) \left[ \Phi \left( \sum_{l=1}^n L_{kl} u_l^j \right) \right]; \quad k, l = 1, 2, \dots, n \quad (3.44)$$

mit

$$\mathbf{u}^j = r^j \mathbf{a}; \quad r^j = 0 \dots r^*$$

Neue Realisationen von  $\mathbf{X}(\mathbf{U})$  ergeben sich somit durch stetige Verlängerung von  $\mathbf{u}^j$  mit  $r^j = r^{(j-1)} + 1$  so lange, bis gerade noch kein Versagenszustand der Struktur eingetreten ist, d.h. solange  $g(\mathbf{x}(\mathbf{u})) > 0$  ist. Versagt die Struktur, wird der letzte Versuch von  $r^j$  verworfen und eine neue Länge durch eine Intervallhalbierung  $r^j = r^{(j-1)} - 1/2$  gefunden. Versagt die Struktur dann abermals, so ergibt sich die Länge zu  $r^j = r^{(j-1)} - 1/4$  usw., bis sich wieder ein sicherer Zustand einstellt und die Länge von  $\mathbf{u}^j$  erneut um die letzte Intervall-Länge vergrößert werden kann. Diese systematische Suche der Grenzzustandspunkte durch Bisektion wird abgebrochen, wenn gilt:

$$r^j \approx r^* : \frac{r^j}{r^{(j-1)}} \leq \epsilon \quad (3.45)$$

Diese sehr einfache und für jede Komponente des Vektors der Basisvariablen gleiche Inkrementierung ist nur im Raum der unkorrelierten und standard-normalverteilten Zufallsvariablen gültig, so dass zu Beginn der Bisektion eine ggf. inkrementell-iterative Berechnung

$$(\mathbf{x}^0 = \bar{\mathbf{X}}) \mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = (\mathbf{x}^0 = \bar{\mathbf{X}}) \mathbf{R} - (\mathbf{x}^0 = \bar{\mathbf{X}}) \mathbf{F}^{(i-1)} \quad (3.46)$$

der Strukturantwort bis zum Mittelwertvektor der Basisvariablen notwendig wird.

### 3.4.2 Nichtkonvergenz der Gleichgewichtsiteration

Wird wie in (3.43) eine inkrementell-iterative Lösungsstrategie verwendet, muss am Ende einer jeden Iteration überprüft werden, ob die gewonnene Lösung für die Strukturantwort schon konvergiert oder ob die Lösung divergiert. Ein naheliegendes Konvergenzkriterium ist die Überprüfung des Verschiebungszuwachses (siehe z.B. Bathe (1996))

$$\frac{\|\Delta \mathbf{U}^{(i)}\|}{\|\mathbf{x}^j \mathbf{U}^{(i)}\|} \leq \epsilon_D \quad (3.47)$$

am Ende jeder Iteration  $i$  in Abhängigkeit von den Gesamtverschiebungen in derselben Iteration. Ein anderes Kriterium überprüft die Norm des Vektors der Ungleichgewichtskräfte in Abhängigkeit zum ursprünglichen Lastzuwachs:

$$\frac{\|\mathbf{x}^j \mathbf{R} - \mathbf{x}^j \mathbf{F}^{(i)}\|}{\|\mathbf{x}^j \mathbf{R} - \mathbf{x}^j \mathbf{F}\|} \leq \epsilon_F \quad (3.48)$$

Schließlich lässt ein Überprüfen des Zuwachses der Energie während jeder Iteration  $i$  in Abhängigkeit zum Anfangszuwachs an Energie

$$\frac{\Delta \mathbf{U}^{(i)T}(\mathbf{x}^j \mathbf{R} - \mathbf{x}^j \mathbf{F}^{(i-1)})}{\Delta \mathbf{U}^{(1)T}(\mathbf{x}^j \mathbf{R} - \mathbf{x}^j \mathbf{F})} \leq \epsilon_E \quad (3.49)$$

erkennen, ob sowohl die Verschiebungen als auch die Kraftgrößen einem Gleichgewichtszustand nahekommen. Sind eines oder mehrere der Konvergenzkriterien (3.47), (3.48) und (3.49) erfüllt, so kann mit der oben beschriebenen Verlängerung von  $\mathbf{u}^j$  fortgefahren werden, ansonsten muss eine Intervallhalbierung durchgeführt werden.

### 3.4.3 Singularität der tangentialen Systemsteifigkeitsmatrix

Die Konvergenzkriterien sind zur Auffindung der Grenzzustände allein nicht geeignet. Im Allgemeinen tritt das Versagen der Struktur, wenn die Verschiebungen während einer kleinen Lastzunahme relativ groß werden. Numerisch bedeutet dies, dass mindestens ein Pivot-Element innerhalb der Dreieckszerlegung

$$\mathbf{x}^j \mathbf{K} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T \quad (3.50)$$

der tangentialen Systemsteifigkeitsmatrix kleiner oder gleich Null wird. Damit ist  $\mathbf{x}^j \mathbf{K}$  singulär, d.h. die Determinante

$$\det(\mathbf{x}^j \mathbf{K}) = 0 \quad (3.51)$$

wird zu Null. Gleichbedeutend damit ist, dass sich der kleinste Eigenwert  $\lambda_1$  des Standard-Eigenproblems für die tangentielle Systemsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{x}^j \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_k = \lambda_k \boldsymbol{\phi}_k \quad (3.52)$$

zu Null ergibt. Demnach sollten zur eindeutigen Ermittlung eines Grenzzustandspunktes zusätzlich immer eine begleitende Eigenwertanalyse für die tangentielle Systemsteifigkeitsmatrix durchgeführt werden.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Beziehungen (3.50), (3.51) und (3.52) nur zum Auffinden der kritischen Lasten für die Untersuchung lokaler Versagenszustände geeignet sind. Sind dagegen Grenzzustände einer Struktur auch im Nachbeulbereich vorhanden, so muss zusätzlich untersucht werden, ob das Tragwerk eventuell eine Reserve der Tragfähigkeit besitzt oder nicht (vgl. z.B. [Hutchinson und Koiter \(1970\)](#)). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sind Systeme, die Gleichgewichtszustände auch im Nachbeulbereich aufweisen, nicht Gegenstand der weiteren Untersuchung.





## 4

# Approximation und Interpolation von Grenzzustandsfunktionen

## 4.1 Einleitung

Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit einer Struktur mit Hilfe der in den Abschnitten 2.4, 2.5 und 2.7 dargestellten Simulationstechniken erfordert, dass die Funktion der Strukturantwort  $g(\mathbf{X})$  implizit berechnet wird, zum Beispiel durch nichtlineare Strukturanalysen für jede Realisation der Zufallsvariablen. Die Strukturanalysen bilden jedoch den Hauptanteil am Berechnungsaufwand der Zuverlässigkeitsanalyse, so dass die Analyse von realistischen Strukturen durch die begrenzten Computer-Ressourcen stark eingeschränkt ist. Andererseits können explizit formulierte Grenzzustandsfunktionen nur für kleine Systeme und einfache mechanische Modelle gefunden werden. Es liegt daher nahe, die Funktion der Strukturantwort durch eine geeignete Approximationsfunktion bzw. Interpolationsfunktion (Antwortfläche<sup>1</sup>)  $\tilde{g}(\mathbf{X})$  anzunähern. Dadurch ist für die Auswertung des Versagenskriteriums nach der Gleichung (2.1) nur noch von Interesse, ob eine Realisation der Basisvariablen innerhalb oder außerhalb des von  $\tilde{g}(\mathbf{X}) = 0$  gebildeten Raumes ist – die Strukturanalyse kann dann entfallen. In diesem Sinne stellt das Antwortflächenverfahren eine Verbindung zwischen den deterministischen Strukturanalysen und den probabilistischen Analysemethoden dar.

Die üblichen globalen Approximationsverfahren der Funktion der Strukturantwort  $g(\mathbf{x})$  bzw. die Approximation oder Interpolation der Grenzzustandsfunktion  $g(\mathbf{x}) = 0$  in den Abschnitten 4.2 und 4.3 mit Polynomen niedriger Ordnung weisen den entscheidenden Nachteil des Modellfehlers auf, d.h. stark nichtlineare Funktionen  $g(\mathbf{x})$  oder auch  $g(\mathbf{x}) = 0$  können nur mit zum

---

<sup>1</sup>engl.: response surface

Teil beträchtlichen Fehlern angenähert werden. Andererseits neigen Polynome höherer Ordnung dazu, zwischen den Stützstellen zu oszillieren, was die Annäherung völlig unbrauchbar machen kann. Die polynomiale Approximation der Grenzzustandsfunktion durch Regression kann das Approximationsergebnis unbrauchbar machen. Gesucht sind also Interpolationen, die flexibel genug sind, um stark nichtlineare Grenzzustandsfunktionen beliebig genau annähern zu können, die in der Anzahl der verarbeitbaren Stützstellen nicht begrenzt sind und diese dann genau und robust interpolieren können, d.h. keinen Schätzfehler aufweisen. Desweiteren ist zu berücksichtigen, dass die Ermittlung der Stützstellen auf der Grenzzustandsfunktion nicht regelmäßig erfolgt (siehe Abschnitt 4.6).

Aus diesem Grunde werden im Abschnitt 4.4 eine neue Methode der lokalen Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch Normalen-Hyperebenen entwickelt (siehe Roos u. a. (1999)) und eine zweite Methode, die der sekantialen Hyperebenen, modifiziert (siehe Guan und Melchers (1995, 1997)). Alternativ dazu wird eine Möglichkeit der Approximation durch gewichtete Radian vorgestellt (siehe Abschnitt 4.5), die sowohl eine lokale als auch eine globale Interpolation der Stützstellen gewährleistet.

Wie in den folgenden Abschnitten und in den Beispielen gezeigt wird, ist bei allen Methoden, die dem Antwortflächenverfahren zuzuordnen sind, die erforderliche Anzahl an Stützstellen proportional mindestens zum Quadrat der Anzahl der Zufallsvariablen, so dass Aufgabenstellungen mit sehr vielen Zufallsvariablen unter Umständen günstiger mit Hilfe des importance sampling (siehe Abschnitt 2.5) gelöst werden können. Es ist demnach, genauso wie das im Abschnitt 2.7 erläuterte directional sampling, sehr gut zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit komplexer nichtlinearer Strukturen mit nur wenigen Zufallsvariablen einsetzbar. Die Antwortflächenverfahren sind im Gegensatz zum directional sampling darüber hinaus für Sensitivitätsstudien ausgezeichnet geeignet, da weitere Untersuchungen mit nur sehr geringem zusätzlichen Rechenaufwand durchgeführt werden können, wenn die Antwortfläche einmal bekannt ist.

## 4.2 Approximation der Funktion der Strukturantwort

### 4.2.1 Polynomiale Approximation

Ursprünglich waren die ersten Anwendungsbereiche des Antwortflächenverfahrens in den Wirtschaftswissenschaften und in der Chemie zu finden. Dabei besteht die grundsätzliche Annahme darin, dass die zu approximierende Antwort eines physikalischen, chemischen oder biologischen Experiments  $g(\mathbf{x})$

eine Funktion der Realisationen der Basisvariablen

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

darstellt und dass es eine approximative Repräsentation von  $g(\mathbf{x})$  z.B. in der Form von  $n$ -dimensionalen Polynomen niedriger Ordnung

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \dots + \epsilon$$

gibt. Häufig wird zur Approximation ein Polynom zweiter Ordnung verwendet (siehe z.B. [Box und Draper \(1987\)](#) und [Myers \(1971\)](#)):

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \epsilon \quad (4.1)$$

In der Gleichung (4.1) ist  $\epsilon$  ein zufälliger Approximationsfehler. Aufgrund der Symmetrie  $\beta_{ij} = \beta_{ji}$  sind die Koeffizienten durch insgesamt

$$p = 1 + n + \frac{n(n+1)}{2}$$

Stützstellen auf der Funktion  $g(\mathbf{x})$  eindeutig bestimmbar. Das Vorzeichen des Koeffizienten  $\beta_0$  bestimmt, ob im Punkt  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  Versagen der Struktur vorliegt oder nicht. Eine andere Klasse von möglichen Interpolationsfunktionen sind z.B. Lagrange-Polynome ([Cheney \(1966\)](#)).

### 4.2.2 Methode der minimalen Fehlerquadrate

Sind mehr Antworten  $y_k(\mathbf{x})$  bekannt, als zur Bestimmung der  $p$  Koeffizienten benötigt werden, d.h.  $k = 1, 2, \dots, m > p$ , kann versucht werden, den Fehler  $\epsilon$  zu minimieren (siehe dazu [Box und Draper \(1987\)](#) und [Myers \(1971\)](#)). Ist z.B. die  $k$ -te Antwort in einem quadratisch approximierten Fall mit zwei Basisvariablen

$$y_k = \beta_0 + \beta_1 x_{1k} + \beta_2 x_{2k} + \beta_{11} x_{1k}^2 + \beta_{22} x_{2k}^2 + 2\beta_{12} x_{1k} x_{2k} + \epsilon_k$$

was in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.2)$$

ergibt, mit

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}; \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_m \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ 2\beta_{12} \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{11}^2 & x_{21}^2 & x_{11}x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{12}^2 & x_{22}^2 & x_{12}x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1m} & x_{2m} & x_{1m}^2 & x_{2m}^2 & x_{1m}x_{2m} \end{bmatrix}$$

so kann eine Schätzung der Koeffizienten  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  dadurch erfolgen, dass ein Minimum der Fehlerquadrate

$$S = \sum_{k=1}^m \epsilon_k^2 = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \min$$

gefordert wird. Unter Berücksichtigung der Beziehung (4.2) erhält man  $S$  zu

$$S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \rightarrow \min \quad (4.3)$$

Die Entwicklung der rechten Seite von (4.3) liefert

$$\begin{aligned} S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \rightarrow \min \end{aligned}$$

$S$  nimmt ein Minimum an, wenn die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial S(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0 \quad (4.4)$$

zu Null werden. Damit entsteht aus der Beziehung (4.4) ein lineares Gleichungssystem zur Abschätzung der Koeffizienten  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Ist  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  nicht singulär, errechnet sich  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  aus

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Die Schätzwerte der Antwort ergeben sich somit zu

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

### 4.2.3 Varianz-Analyse

Die Varianz-Analyse<sup>2</sup> liefert eine Bewertung des Anpassungsfehlers der Regressions-Analyse. Die wesentlichen Elemente seien hier kurz dargestellt. Der

---

<sup>2</sup>engl.: analysis of variance (ANOVA)

Gesamtfehler  $S_T$  setzt sich aus dem Fehler der Schätzung  $S_R$  und einem Modellfehler  $S_M$  zusammen. Die Summe über die Quadrate der Residuen berechnet sich aus

$$S_R = \sum_{k=1}^m (y_k - \hat{y}_k)^2 = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

Für die Berechnung des Fehlers  $S_M$  wird angenommen, dass die Antwortfunktion

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

bekannt ist. In diesem Fall ergibt sich ein Modellfehler zu

$$S_M = \sum_{k=1}^m (\hat{y}_k - \eta_k)^2 = (\hat{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\eta})^T (\hat{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\eta})$$

Somit ist der Anpassungsfehler

$$S_T = S_R + S_M = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta})^T (\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta})$$

Eine ausführliche Darstellung der Varianz-Analyse kann z.B. in [Box und Draper \(1987\)](#) nachgelesen werden.

Frühe Anwendungen auf die Zuverlässigkeitsanalyse mechanischer Strukturen finden sich bei [Rackwitz \(1982\)](#) und [Faravelli \(1986\)](#).

#### 4.2.4 Ermittlung der Stützstellen

Für die Ermittlung der Regressions-Koeffizienten  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  aus einer Reihe von numerischen Experimenten entstehen auch Anforderungen an den Entwurf dieser Experimente. Die Forderung nach Orthogonalität stellt sicher, dass die ermittelten  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  unkorreliert sind. Wird die Bedingung Rotierbarkeit erfüllt, sind die Antworten  $\mathbf{y}$  nur noch abhängig von ihrem Abstand zum Ursprung des Experiment-Entwurfes und nicht mehr von dem Richtungsvektor. Es wurden verschiedene Entwurfsmöglichkeiten entwickelt, z.B. in [Box und Draper \(1987\)](#).

Eine sehr einfache Methode zur Bestimmung der Stützstellen für eine polynomiale Approximation zweiter Ordnung ohne die gemischten Terme  $x_i x_j$

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2 \quad (4.5)$$

benutzt den Mittelwert der Entwurfsvariablen  $\bar{\mathbf{x}}$  sowie die Punkte parallel zu den Achsenrichtungen  $x_i = \bar{x}_i \pm f \sigma_{x_i}$  zur Festlegung der Stützstellen der Grenzzustandsfunktion. Eine allgemein gültige Regel zur Festlegung des Faktors  $f$  kann nicht gegeben werden. Bei [Klingmüller und Bourgund \(1992\)](#)

wird eine Abschätzung der Größenordnung für  $f$  in Abhängigkeit der zu erwartenden Versagenswahrscheinlichkeit

$$f = \Phi^{-1}(P(F)) \quad (4.6)$$

vorgeschlagen. Demnach sind Werte von  $f = 3, \dots, 5$  sinnvoll. Weitere verbesserte Methoden für den Experiment-Entwurf finden sich z.B. in [Engelund und Rackwitz \(1992\)](#) sowie [Rajashekhar und Ellingwod \(1993\)](#).

### Iterative Ermittlung der Stützstellen

In [Bucher und Bourgund \(1987, 1990\)](#) wird ausgehend von einer Antwortfläche (4.5) mit (4.6) der Punkt mit dem kleinsten Abstand  $\mathbf{x}_D$  zum Punkt  $\bar{\mathbf{x}}$  berechnet. Der Punkt  $\mathbf{x}_D$  wird dann anschließend benutzt, um einen neuen Bezugspunkt für die Antwortfläche durch lineare Interpolation

$$\mathbf{x}_M = \bar{\mathbf{x}} + (\mathbf{x}_D - \bar{\mathbf{x}}) \frac{g(\bar{\mathbf{x}})}{g(\bar{\mathbf{x}}) - g(\mathbf{x}_D)}$$

zu finden.

#### 4.2.5 Bewertung

Problematisch bei der Verwendung der klassischen Antwortflächenverfahren ist, dass eine polynomiale Approximation bei stark nichtlinearen Grenzzustandsfunktionen versagt (Modellfehler). Durch die Ermittlung der Koeffizienten mittels Regression werden die eigentlich exakt ermittelten Stützstellen nur näherungsweise interpoliert (Schätzfehler). Der dabei entstehende Anpassungsfehler kann unter Umständen das Approximationsergebnis unbrauchbar machen (siehe dazu z.B. die Untersuchungen und Beispiele von [Engelund und Rackwitz \(1992\)](#)).

## 4.3 Polynomiale Interpolation der Grenzzustandsfunktion

Im Abschnitt 4.2 wurde zur Modellierung der Antwortfunktion  $g(\mathbf{x})$  ein mehrdimensionales Polynom zweiter Ordnung verwendet. Mit dieser polynomialen Interpolationfunktion kann aber auch, wie in [Bucher u. a. \(1989\)](#) vorgeschlagen, die Grenzzustandsfunktion  $g(\mathbf{X}) = 0$  allein, d.h die Grenze zwischen sicherem und unsicherem Bereich

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j = 0$$

approximiert werden. Die Suchrichtungen für die Grenzzustandspunkte werden üblicherweise zunächst in  $\bar{\mathbf{x}}$  beginnend parallel zu den Achsenrichtungen mit  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \pm \mathbf{e}_i$  festgelegt. Dabei sind  $\mathbf{e}_i$  die jeweiligen Einheitsvektoren mit  $i = 1, 2, \dots, n$ . Damit sind dann  $k = 2n < p$  Stützstellen bekannt. Die restlichen notwendigen Stützstellen können nach einem Schema von [Ouypornprasert und Bucher \(1988\)](#); [Bucher u. a. \(1988\)](#) so gewählt werden, dass die Suchrichtungen in die Quadranten gelegt werden, in welchen die Grenzzustandspunkte auf den zugehörigen Achsen im standard-normalverteilten Raum der Basisvariablen den kürzesten Abstand zum Ursprung besitzen. Sollen  $k > p$  Stützstellen verwendet werden, müssen die Koeffizienten wieder durch Regression (Abschnitt 4.2.2) bestimmt werden.

Der hauptsächliche Vorteil der Approximation der Grenzzustandsfunktion  $g(\mathbf{X}) = 0$  gegenüber den klassischen Antwortflächenverfahren besteht darin, dass der für die Zuverlässigkeitsanalyse äußerst wichtige Grenzzustand genauer erfasst werden kann. Diese Approximation wurde in verschiedenen Beispielen, so in [Schuëller u. a. \(1991\)](#) und [Bucher und Schuëller \(1994\)](#), erfolgreich getestet.

## 4.4 Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch Hyperebenen

### 4.4.1 Normalenflächen

Es soll angenommen werden, dass Stützstellen  $P_i(\mathbf{x})$  auf der Grenzzustandsfunktion existieren (siehe Bild 4.1). Die Ortsvektoren in kartesischen Koordinaten auf diese Punkte seien  $\mathbf{l}_i(\mathbf{x})$ . Damit lassen sich die Differenzvektoren

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{l}_i - \mathbf{m}$$

ausgehend von einem zentralen Bezugspunkt  $M$  definieren. Der Bezugspunkt muss im Inneren des sicheren Bereiches liegen. Zum Beispiel kann der Erwartungswert aller Basisvariablen  $\mathbf{m} = \{E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_n]\}^T$  zur Festlegung von  $M$  benutzt werden. Der Vektor einer  $j$ -ten Realisation der Basisvariablen  $\mathbf{r}_j(\mathbf{x})$  soll auch auf den Punkt  $M$  bezogen sein. Somit kann der Winkel zwischen dem Vektor der Stichprobe und den Differenzvektoren aus

$$\cos \phi_{ij} = \frac{\mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{p}_i\| \|\mathbf{r}_j\|} \quad 0 \leq \phi_{ij} \leq \pi$$

errechnet werden. Mit der Annahme, dass die Hyperebene in einem Punkt  $P_i(\mathbf{x})$  und auf  $\mathbf{p}_i$  bezogen durch die Hessesche Normalform der Ebenengleichung

$$\mathbf{e}_{\mathbf{p}_i}^T f_{ij} \mathbf{r}_j = \|\mathbf{p}_i\|$$

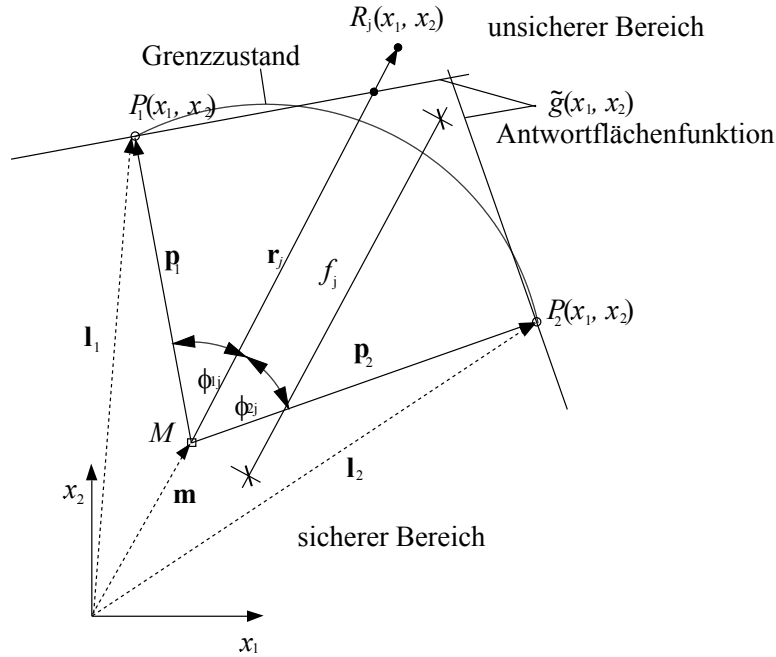


Abbildung 4.1: Approximation der Grenzzustandsfunktion mit Normalen-Hyperebenen.

festgelegt ist, kann der Skalierungsfaktor

$$f_j = \frac{\|\mathbf{p}_i\|}{\mathbf{e}_{p_i}^T \mathbf{r}_j} \Big|_{i: \cos \phi_{ij} \rightarrow \max}$$

zum Schnittpunkt der Normalen-Hyperebene mit dem Stichprobenvektor gefunden werden. Mit den Faktoren  $f_j$

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}(\mathbf{x}) + f_j \mathbf{r}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

kann die Antwortflächenfunktion in kartesischen Koordinaten definiert werden. Die Approximation durch Normalen-Hyperebenen erzeugt zum Bezugspunkt  $M$  sternförmige, stetige und stückweise differenzierbare Antwortfunktionen. Die Verwendung von Normalen-Hyperebenen ist sehr robust und flexibel.

#### 4.4.2 Simplexe

Eine andere Möglichkeit der Approximation mit Hyperebenen ist die von Guan und Melchers (1995, 1997) in die Zuverlässigkeit eingeführte Verwendung von Simplexe. In einem  $n$ -dimensionalen Raum der Basisvariablen  $\mathbf{X}$  ist eine



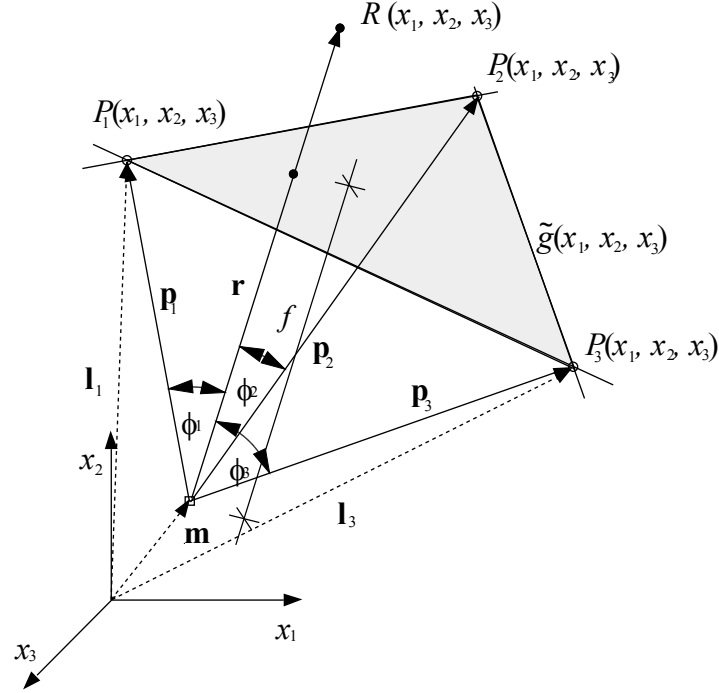


Abbildung 4.2: Approximation der Grenzzustandsfunktion durch Simplexe.

$n$ -dimensionale Hyperebene durch  $n$  Stützstellen eindeutig festgelegt (siehe Bild 4.2). Eine Hyperebene dieser Art resultiert aus der Linearkombination

$$\bar{g}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{m}(x_1, \dots, x_n) + \mathbf{p}_1 + \alpha_1(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + \dots + \alpha_{n-1}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_1)$$

Das lineare Gleichungssystem

$$[\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_1 \quad -\mathbf{r}] [\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \quad f]^T = -\mathbf{p}_1 \quad (4.7)$$

ergibt den Schnittpunkt zwischen der Hyperebene und dem Stichprobenvektor. In Guan und Melchers (1995) wird eine Selektionsmöglichkeit der Stützpunktvektoren  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  angegeben. Eine andere Möglichkeit soll im Folgenden aufgezeigt werden. Dabei sollte als erster Stützpunktvektor  $\mathbf{p}_1$  der Vektor gewählt werden, für den  $\cos \phi_1 = \cos \phi_{i,\max}$  gilt. Die nächsten Stützpunktvektoren  $(\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$  müssen die Bedingung

$$\cos(\phi_i) \rightarrow \max : \cos(\gamma_i) > 0 \quad (4.8)$$

erfüllen. Dieses Kriterium stellt sicher, dass sich diese Stützpunkte im interessierenden Halbraum befinden (siehe Abbildung 4.3). Der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  ergibt sich aus

$$\mathbf{n} = \mathbf{r} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{p}_i \quad (4.9)$$

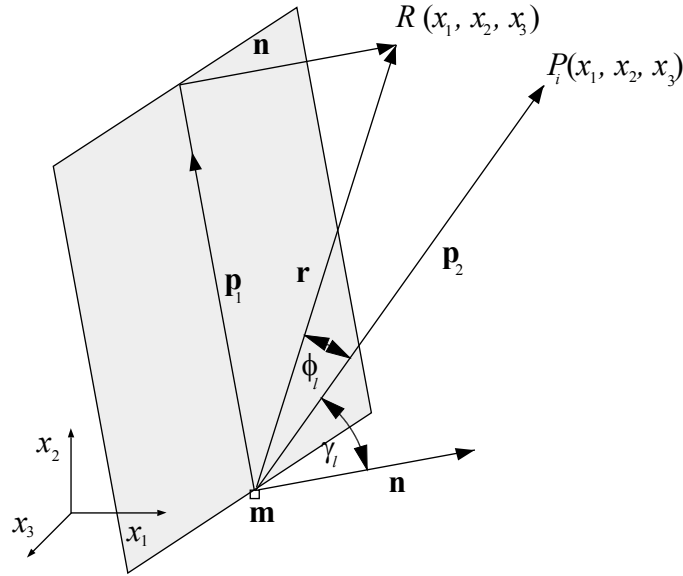


Abbildung 4.3: Halbraum-Kriterium zur Bestimmung der Stützpunkte.

und

$$\mathbf{n}^T \mathbf{p}_j = 0 \quad (4.10)$$

für alle  $(i, j = 1 \dots n - 1)$ . Die Beziehungen (4.9) und (4.10) ergeben ein Gleichungssystem

$$\left( \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{p}_i \right)^T \mathbf{p}_j = \mathbf{r}^T \mathbf{p}_j$$

der maximalen Größe  $(n - 1)$  zur Bestimmung der Koordinaten  $\beta_i$  des Fußpunktes von  $n$ . Mit  $\beta_i$  können der Normalenvektor  $n$  mit den Beziehungen (4.9) und (4.10) ermittelt und das Halbraum-Kriterium (4.8) überprüft werden. Fallen Stichprobenvektor  $\mathbf{r}$  und ein Stützpunktvektor  $\mathbf{p}_i$  bzw. eine von den Stützpunktvektoren aufgespannte Ebene zusammen, so ist der Normalenvektor  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$  und die Koeffizienten-Matrix  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_j$  singular. Ist dies der Fall, so kann der Faktor  $f$  einfach aus

$$f \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{p}_i \quad (4.11)$$

ermittelt werden. Die Lösung von (4.11) ergibt sich aus

$$\left\| f \mathbf{r} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{p}_i \right\| \rightarrow \min$$

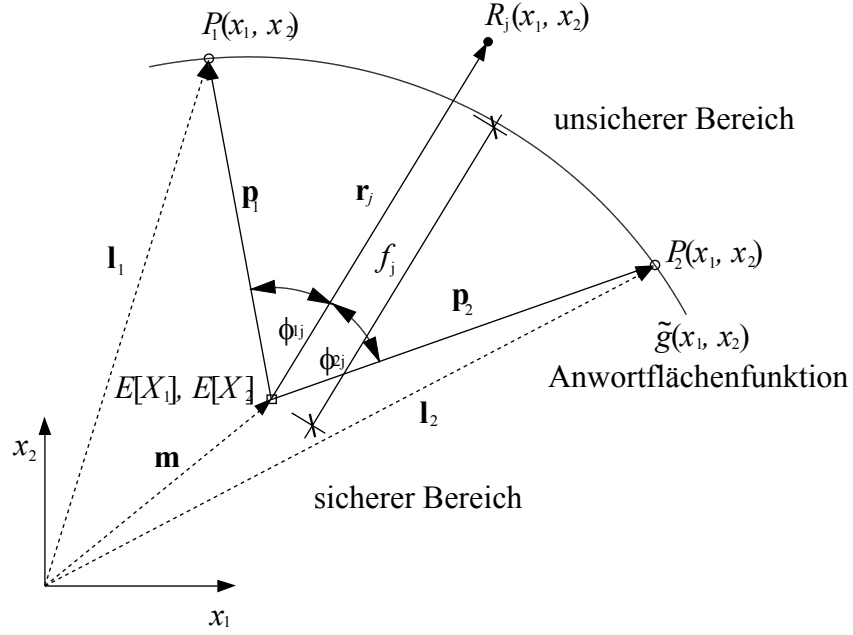


Abbildung 4.4: Approximation der Grenzzustandsfunktion mit gewichteten Radien.

Sind  $n$  Stützpunkte gefunden, kann der Faktor  $f$  aus der Beziehung (4.7) ermittelt werden. Zusätzlich muss überprüft werden, ob die Bedingungen

$$\alpha_i \geq 0; \sum_i \alpha_i \leq 0 \quad \forall (i = 1 \dots n - 1)$$

eingehalten sind. Ist dies nicht der Fall, dann befindet sich der Stichprobenvektor  $\mathbf{r}$  nicht innerhalb der Hyperebene, so dass der  $n$ -te Stützpunkt mit dem nächsten Stützpunkt in dem richtigen Halbraum solange gewechselt werden muss, bis die Bedingungen erfüllt sind.

## 4.5 Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit gewichteten Radien

Existieren Punkte  $P_i(\mathbf{x})$  auf der Grenzzustandsfunktion (siehe Abbildung 4.4) mit den Ortsvektoren in kartesischen Koordinaten  $\mathbf{l}_i(\mathbf{x})$ , so lassen sich Differenzvektoren

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{l}_i - \mathbf{m} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

im Bezug auf einen Bezugspunkt  $M$  angeben. Hierbei kann  $M$  wieder als der Erwartungswert aller Basisvariablen  $\mathbf{m} = \{E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_n]\}^T$  gewählt werden kann. Der Stichprobenvektor  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{m}$  ist auf  $M$  bezogen, so dass sich der Winkel zwischen dem Vektor der Stichprobe und den

Differenzvektoren aus

$$\cos \phi_{ij} = \frac{\mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{p}_i\| \|\mathbf{r}_j\|} \quad 0 \leq \phi_{ij} \leq \pi$$

ergibt. Es sei darauf hingewiesen, dass die Darstellung der Vektoren  $\mathbf{p}_i$  und  $\mathbf{r}$  vorzugsweise im Raum standardnormalverteilter Variablen erfolgen sollte. Die Wichtung eines beliebigen Differenzvektors  $\mathbf{p}_i$  in Abhängigkeit eines gewählten Stichprobenvektors  $\mathbf{r}_j$  lässt sich im einfachsten Fall als

$$w_{ij} = \frac{1}{\phi_{ij}} \quad (4.12)$$

schreiben. Somit kann der Skalierungsfaktor

$$f_j = \frac{\sum_i \|\mathbf{p}_i\| w_{ij}}{\sum_i w_{ij}}$$

zum Schnittpunkt der Antwortflächenfunktion mit dem Stichprobenvektor gefunden werden (siehe Abbildung 4.4). Die Faktoren  $f_j$  ergeben die Antwortflächenfunktion

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}(\mathbf{x}) + f \frac{\mathbf{r}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|} = \mathbf{0}$$

im kartesischen Koordinatensystem. Die sehr einfache Annahme (4.12) erzeugt eine geschlossene Antwortfunktion. Wird nur eine einzige Stützstelle verwendet, dann ist  $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  eine kreisförmige Funktion (siehe Abbildung 4.5). Durch die Einführung einer klein zu wählenden Größe  $\epsilon$  in die Gleichung (4.12)

$$w_{ij} = \frac{1}{\phi_{ij} + \epsilon} \quad (4.13)$$

kann die Singularität für  $\phi_{ij} = 0$  beseitigt werden. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass durch die Einführung von  $\epsilon$  die Grenzzustandspunkte nicht mehr interpoliert werden. Die Funktion der Antwortfläche für  $n = 2$  und z.B.  $N = 5$  Punkte auf der Grenzzustandsfunktion

$$f_j = \frac{\sum_{i=1}^N \|\mathbf{p}_i\| w_{ij}}{\sum_{i=1}^N w_{ij}} \quad (4.14)$$

mit den Wichtungen nach (4.13) ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Wird der Bereich in der Nähe einer Stützstelle  $P_i(\mathbf{x})$  stärker gewichtet, z.B. in Form von

$$w_{ij} = \left( \frac{1}{\phi_{ij} + \epsilon} \right)^2 \quad (4.15)$$

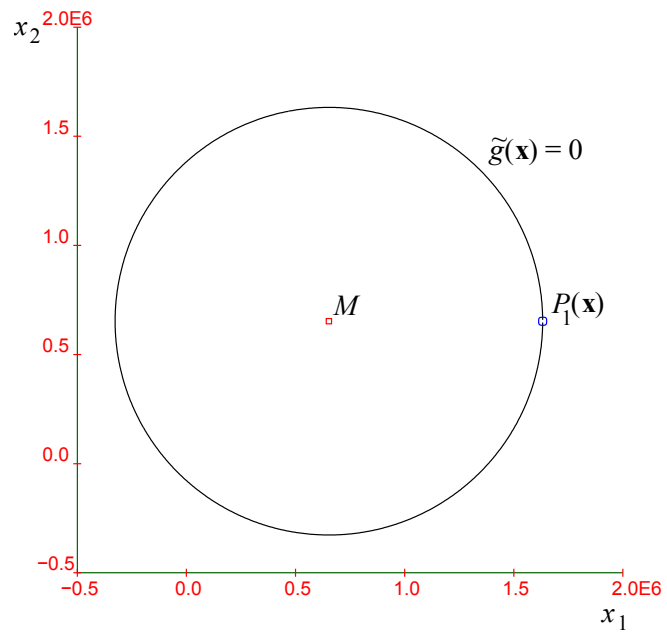


Abbildung 4.5: Antwortfunktion für eine einzige Stützstelle.

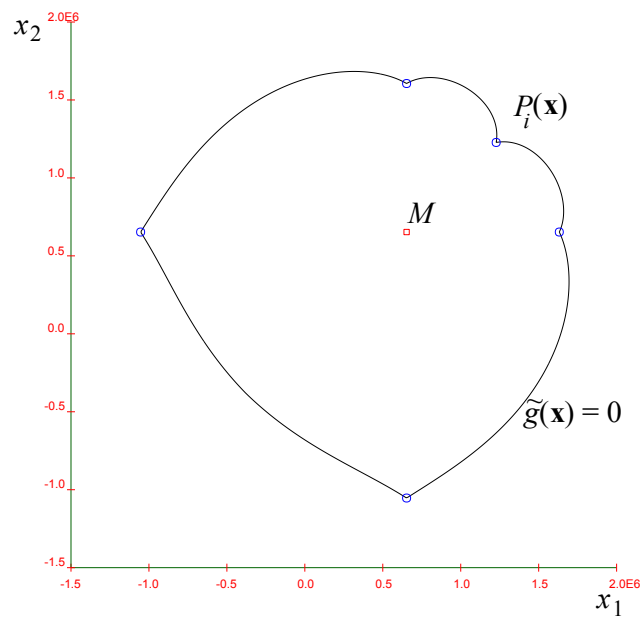


Abbildung 4.6: Antwortfläche mit einer einfachen Wichtungsfunktion.

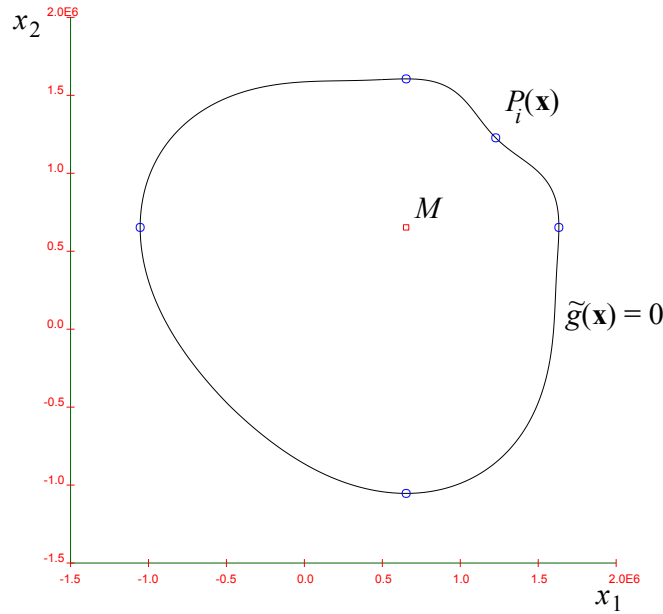


Abbildung 4.7: Antwortfläche gewichtet mit (4.15).

entstehen stetig differenzierbare Kurven (siehe Abbildung 4.7). Statt einer gleichzeitigen Berücksichtigung aller  $P_i(\mathbf{x})$  kann auch die Verwendung weniger Stützpunkte zu guten Approximationen führen. Wird z.B. nur ein Stützpunkt

$$f_j = \frac{\|\mathbf{p}_1\| w_{1j}}{w_{1j}} \Big|_{P_1(\mathbf{x}): \cos \phi_{1j} \rightarrow \max} \quad (4.16)$$

verwendet, sind die Approximationsfunktionen immerhin noch Kreis- bzw. Hyperkugelsegmente (siehe Bild 4.8). Im Allgemeinen ist die Verwendung von  $n$  Stützpunkten insbesondere für viele Basisvariablen erfolgversprechend.

## 4.6 Adaptive Approximation und Interpolation

Wie beim adaptive directional sampling (siehe Abschnitt 2.7) kann die Simulation der Einheitsvektoren adaptiv in die dominanten Bereiche des Raumes unabhängiger und standardnormalverteilter Zufallsvariablen verlegt werden, in denen die Grenzzustandsfunktion die geringsten Abstände zum Koordinatenursprung aufweist. Dazu wird eine spezifische Simulations-Dichtefunktion  $h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{a})$  für die Richtungen  $\mathbf{a}$  eingeführt. Die Forderung, dass die statistischen Momente erster und zweiter Ordnung der Simulationsdichte gleich den statistischen Momenten derjenigen Stichproben der Basisvariablen sind, die in

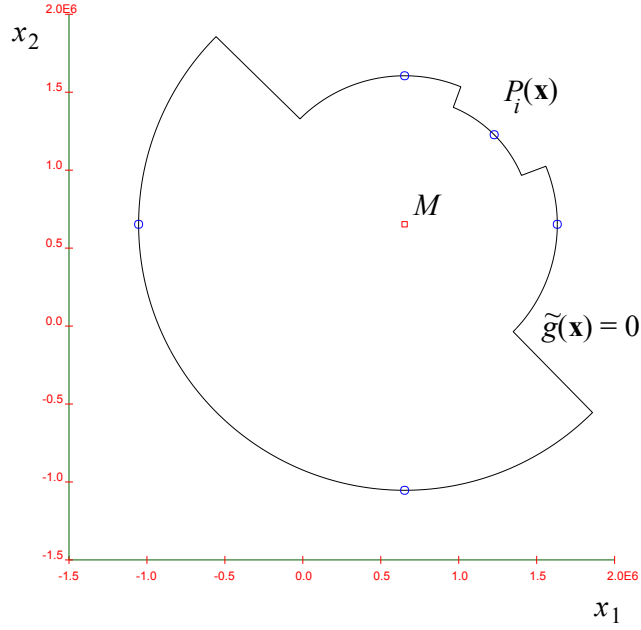


Abbildung 4.8: Antwortfläche gewichtet mit (4.13) und  $(n-1)$  Stützpunkten.

den Versagensbereich fallen (siehe Bucher (1988))

$$E[\mathbf{Y}] = E[\mathbf{A} | g(r^*(\mathbf{a}) \mathbf{a}) \leq 0]$$

$$E[(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})^T] = E[(\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}})(\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}})^T | g(r^*(\mathbf{a}) \mathbf{a}) \leq 0]$$

erzeugt eine Näherung der idealen Simulationsdichte (2.10). Wie in Kijawatworawet (1991); Kijawatworawet u. a. (1998) werden stattdessen für die Ermittlung der Simulationsdichte die Beziehungen

$$E[\mathbf{Y}] = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i w_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

$$E[(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})^T] = \frac{\sum_{i=1}^N w_i (\mathbf{a}_i - \bar{\mathbf{a}})(\mathbf{a}_i - \bar{\mathbf{a}})^T}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

genutzt, wobei die Wichtungen  $w_i$  definiert sind durch

$$w_i = \int_{r_i^*(\mathbf{a})}^{\infty} r_i^{n-1} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2}\right) dr_i$$

Dieses Vorgehen der adaptiven Simulation der Einheitsvektoren entspricht dem adaptive directional sampling, so dass auch dessen generelle Einschränkungen hier gelten. Zum Beispiel müssen immer genügend Stichproben auf die Grenzzustandsfunktion hinführen, was bei ausgeprägt konvexen Grenzzustandsfunktionen, die zudem nur in einer Richtung vom Koordinatenursprung aus liegen, eine sehr hohe Anzahl von Startsimulationen erfordert.

In der vorliegenden Arbeit wird die beschriebene adaptive Simulation der Einheitsvektoren für die Ermittlung der Interpolations-Stützstellen verwendet. Sind die vorgesehenen Stützstellen gefunden, so werden diese durch die Verfahren in den Abschnitten 4.4 und 4.5 interpoliert.

In Waarts (2000) wird eine ähnliche Vorgehensweise vorgeschlagen. Allerdings wird zur Identifikation wichtiger Versagensbereiche nicht die Wichtungsfunktion benutzt. Stattdessen werden in einem ersten Schritt die Grenzzustandspunkte auf den Koordinatenachsen des Raumes unabhängiger und standardnormalverteilter Zufallsvariablen gesucht, siehe dazu Abschnitt 4.2.4. Durch diese Stützstellen wird anschließend eine quadratische Antwortfunktion gelegt. Diese Antwortfunktion wird benutzt, um neue adaptiv verbesserte Richtungen für die Suche der Grenzzustandspunkte zu finden. Zur Approximation der Stützstellen wird allerdings nur ein Polynom zweiter Ordnung benutzt, siehe Abschnitt 4.2.

## 4.7 Fehlerordnung der Interpolation

Wie in den Abschnitten 4.4 und 4.5 gezeigt wurde, kann die nur punktweise bekannte Grenzzustandsfunktion  $g$  bereichsweise durch einen Interpolationsoperator  $\Pi$  approximiert werden. Der dabei entstehende Approximationsfehler kann für die Approximation eines offenen Quaders oder eines offenen Simplex  $G \subset \mathbb{R}^n$  abgeschätzt werden, wenn der Interpolationsoperator  $\Pi$  Funktionen vom Grad  $\leq k$  auf sich selbst abbildet (vgl. Ciarlet und Raviart (1972)), d.h. wenn gilt

$$\Pi : \Pi g = g \quad (4.17)$$

und wenn  $\Pi$  beliebige Funktionen  $g$  von einem Sobolew-Raum der Ordnung  $k + 1$  in einem Sobolew-Raum der Ordnung  $m$  abbildet

$$\Pi : W_p^{k+1}(G) \mapsto W_p^m(G) \quad (4.18)$$

mit

$$0 \leq m \leq k + 1$$

Dabei gehört eine Funktion  $g$  zum Sobolew-Raum  $W_p^m(G)$ , wenn die Norm

$$W_p^m : \|g\|_{W_p^m}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha g\|_{L_p}^p \quad (4.19)$$

erklärt ist.  $D^\alpha$  ist der auf  $g$  anzuwendende Differentialoperator

$$D^\alpha g = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} g$$

der über den Multiindex

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$



definiert wird. Die Ordnung von  $\alpha$  ist durch

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

bestimmt. Die  $L_p$ -Norm der Funktion  $g$  im  $L_p$ -Raum ist definiert als

$$W_p^0(G) : \|g\|_{L_p} = \left( \int_G |g(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

für  $p \geq 1$ . Mit den Voraussetzungen (4.17) und (4.18) existiert eine Konstante  $C$ , so dass für alle  $g \in W_p^m(G)$

$$\|g - \Pi g\|_{W_p^m(G)} \leq C \|g\|_{W_p^{k+1}(G)} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} \quad (4.20)$$

gilt (vgl. Zeidler (1977)). Die Beziehung (4.20) liefert eine Abschätzung des Defektes, d.h. des Approximationsfehlers gemessen in einer gewählten Norm eines Sobolew-Raumes. Dabei ist  $h$  der größte Abstand der Stützpunkte und  $\rho$  der Radius der größten eingeschlossenen Kugel in dem betrachteten Bereich  $G$ .  $C$  und  $\|g\|_{W_p^{k+1}(G)}$  sind beschränkte und von  $h$  und  $\rho$  unabhängige Größen. Die Fehlerordnung hängt somit entscheidend von  $k$  und  $m$  ab.  $k = 0$  bedeutet, dass in dem ausgewählten Bereich  $G$  konstante Funktionen  $g$  auf sich selbst abgebildet werden können. Dies trifft für die Approximation mit ungewichteten Radien nach der Gleichung (4.16) zu. Für eine lineare Interpolationsformel gemäß der Verwendung von Hyperebenen muss der Index  $k = 1$  gesetzt werden. Werden für die Interpolation unter der Verwendung gewichteter Radien  $N = n$  Stützpunkte für die Wichtung (4.14) berücksichtigt, ergibt sich ebenfalls  $k = 1$ . Werden dagegen für  $n = 2$ ,  $N = 3$  und für  $n = 3$ ,  $N = 6$  usw. Stützpunkte verwendet, ist  $k = 2$ . Wird weiterhin z.B.  $m = 0$  gewählt, so wird der Defekt nur noch in der  $L_p$ -Norm abgeschätzt. Es ergibt sich ein Fehler der Ordnung  $h^{k+1}$ . Wird hingegen  $m = 1$  gewählt, verschärft sich die Fehlernorm der linken Seite von (4.20), da zusätzlich der Defekt in den Ableitungen mit enthalten ist. Allerdings ist dann die zu erreichende Konvergenzordnung niedriger.

## 4.8 Fehlerabschätzung durch Simulation

Einen Ansatz für die Schätzung eines zumindest lokalen Fehlers mittels bedingter Versagenswahrscheinlichkeiten liefern Macke u. a. (2000). Eine mögliche Erweiterung für solche Bereiche in der Nähe des  $\beta$ -Punktes wäre folgendes Vorgehen: Die bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten für eine beliebige gegebene Richtung  $\mathbf{a}_i$  kann aus der Beziehung

$$P(F)|_{\mathbf{a}_i} = (1 - \chi_n^2(r_i^{*2}(\mathbf{a}_i))) \frac{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_i)}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{a}_i)} \quad (4.21)$$

ermittelt werden (siehe Abschnitt 2.7). Dabei ist der Grenzzustandspunkt  $r_i^*$  durch die Bedingung

$$g(r_i^*(\mathbf{a}_i) \mid \mathbf{a}_i) = 0$$

gegeben. In der gleichen Richtung  $\mathbf{a}_i$  kann aber auch genauso eine bedingte Versagenswahrscheinlichkeit für den Punkt auf der Antwortfläche

$$\tilde{g}(\tilde{r}(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a}) = 0$$

zu

$$\tilde{P}(F) \mid \mathbf{a}_i = (1 - \chi_n^2(\tilde{r}_i^2(\mathbf{a}_i))) \frac{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_i)}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{a}_i)} \quad (4.22)$$

ermittelt werden. Der Approximationsfehler wird definiert als der Schätzer aus  $m$  zusätzlichen Stichproben für den Betrag der Differenzen der Versagenswahrscheinlichkeiten (4.21) und (4.22) zu

$$\tilde{\epsilon} = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |(1 - \chi_n^2(r_i^{*2}(\mathbf{a}_i))) - (1 - \chi_n^2(\tilde{r}_i^2(\mathbf{a}_i)))| \right) \frac{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})}{h_{\mathbf{Y}}(\mathbf{a})}$$

# 5

## Numerische Beispiele

### 5.1 Einleitung

Verschiedene numerische Beispiele sollen im Folgenden die prinzipielle Eignung der in den Abschnitten 4.4 und 4.5 entwickelten Interpolationsverfahren verdeutlichen. Diese Beispiele sind aus dem Bereich der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit sowohl geometrisch als auch physikalisch nichtlinearer Strukturen gewählt worden. Im ersten Beispiel der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit einer sehr einfachen nichtlinearen Struktur mit zufälligen Lasten wird der Einfluss der Genauigkeit der mechanischen Analyse auf die Größe der Versagenswahrscheinlichkeit untersucht. Das zweite Beispiel demonstriert die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit einer sowohl physikalisch als auch geometrisch nichtlinearen Schalenstruktur. Ein drittes strukturmechanisches Beispiel untersucht die Möglichkeit der Anwendung der Interpolationsverfahren für eine reale Struktur mit wirklichkeitsnahen Annahmen für die Einwirkungen und für die Widerstandsgrößen.

Alle numerischen Berechnungen erfolgten mit dem Software-Paket *Slang* – the Structural Language (Bucher u. a. (1995)). *Slang* beinhaltet zusätzlich zu den probabilistischen Verfahren zur Modellierung von stochastischen Belastungen und physikalischen sowie geometrischen Unsicherheiten auch Finite-Elemente-Methoden zur linearen sowie nichtlinearen Berechnung von Strukturantworten. Die in Kapitel 2 beschriebenen Verfahren und darüber hinaus noch weitere Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse sind in *Slang* bereits vorhanden. Im Rahmen dieser Arbeit wurden zusätzlich die vorgestellten Interpolationsverfahren und das nichtlineare Schalenelement SHELL9N (siehe Anhang A) sowie das zugehörige plastische Materialgesetz implementiert. Die *Slang*-Eingabedateien für die Analyse des zweiten Anwendungsbeispiels sind im Anhang B dokumentiert.

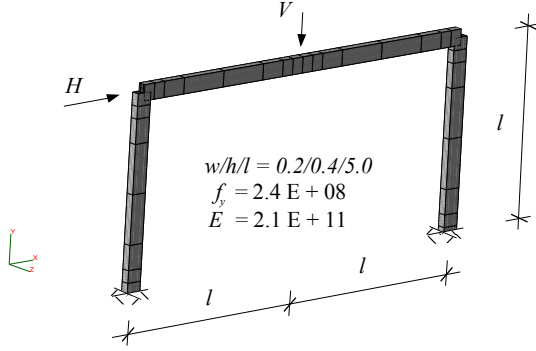


Abbildung 5.1: Einfache Balkenstruktur.

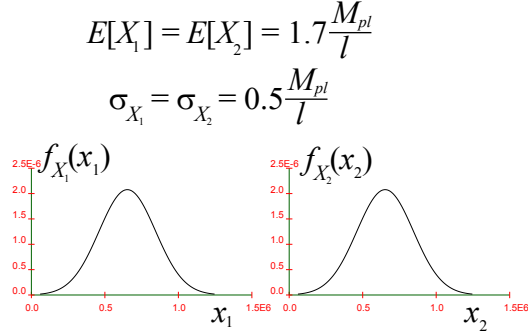


Abbildung 5.2: Dichtefunktionen der Lastgrößen.

## 5.2 Versagenswahrscheinlichkeit eines einfachen Rahmens mit zufälligen Lasten

### 5.2.1 Einleitung

Dieses erste Beispiel der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit einer sehr einfachen nichtlinearen Struktur mit  $n = 2$  zufällig verteilten Lasten dient dazu, den Einfluss der Genauigkeit der mechanischen Analyse auf die Größe der Versagenswahrscheinlichkeit zu bewerten. Dazu soll das Ergebnis einer genäherten Ermittlung des Grenzzustandes der Struktur mittels der Fließgelenktheorie I. Ordnung mit dem Ergebnis einer nichtlinearen Finite-Elemente-Berechnung verglichen werden. Darüber hinaus sollen die vorgestellten Antwortflächenverfahren mit der polynomialen Interpolation des Abschnittes 4.3 mit  $N = p = n + \frac{n(n+1)}{2} = 5$  verglichen werden.

### 5.2.2 Mechanisches System und Zufallsgrößen

Stützen und Riegel der Struktur besitzen einen rechteckigen Querschnitt mit den Abmessungen  $b/h = 0.2 \text{ m}/0.4 \text{ m}$ . Die Stützen seien vollständig eingespannt. Das Materialverhalten der Struktur wird, wie im Abschnitt 3.2.5 erläutert, als elastisch-plastisch mit einer Fließbedingung nach von Mises ohne Verfestigung angenommen. Die Fließspannung ist mit  $f_y = 2.4 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ , die Querdehnzahl mit  $\nu = 0.0$  und der Elastizitätsmodul mit  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$  festgelegt. Die Struktur ist durch eine horizontale und eine vertikale Einzellast  $H$  und  $V$  belastet. Die Lasten seien unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen  $X_1 = H$  und  $X_2 = V$  (vgl. Abbildung 5.2). Die Mittelwerte der Lasten sowie deren Standardabweichungen sollen gleich groß sein:  $E[X_1] = E[X_2] = 1.7 \frac{M_{pl}}{l}$  und  $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = \frac{M_{pl}}{l}$ . Das maximal aufnehmbare,

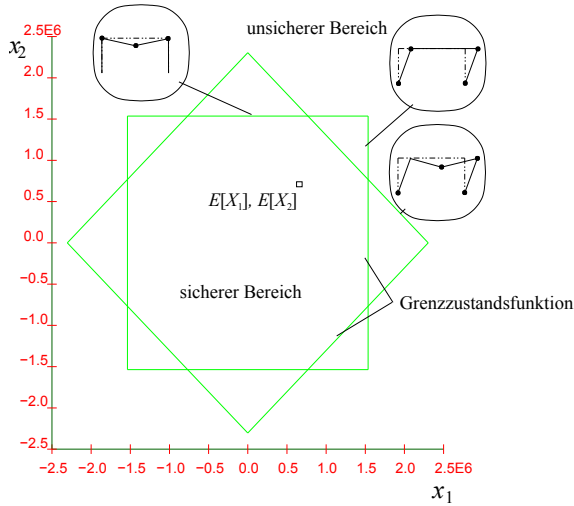


Abbildung 5.3: Grenzzustandsfunktion nach der Fließgelenktheorie I. Ordnung.

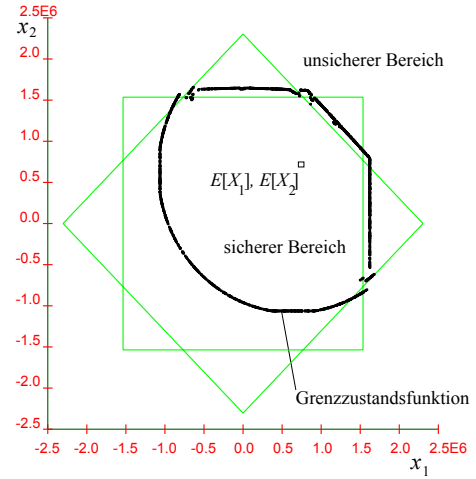


Abbildung 5.4: Vergleich der Grenzzustände nach der Fließgelenktheorie I. Ordnung und nach der nichtlinearen Finite-Balkenelemente-Lösung.

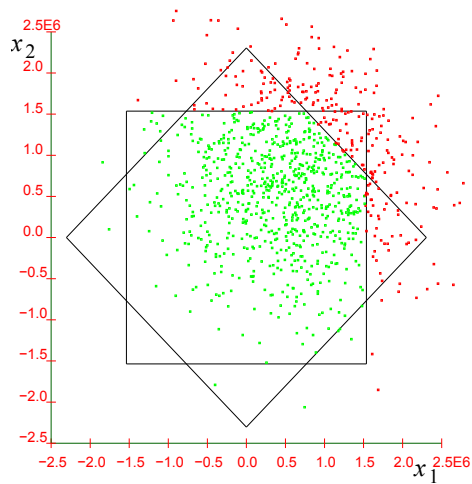


Abbildung 5.5: Adaptive sampling nach dem ersten Simulationslauf.

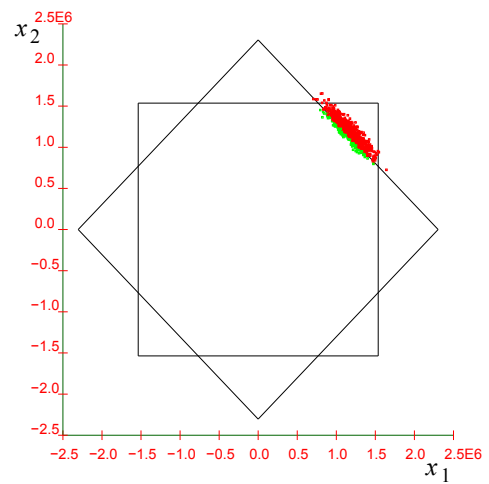


Abbildung 5.6: Adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

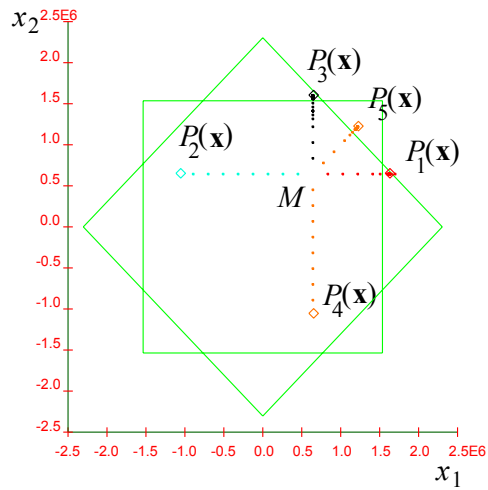


Abbildung 5.7: Entsprechend Abschnitt 4.3 ermittelte Grenzzustandspunkte.

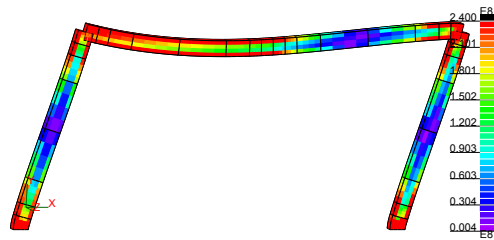


Abbildung 5.8: von Mises Spannungen am Grenzzustandspunkt  $P_1$ .

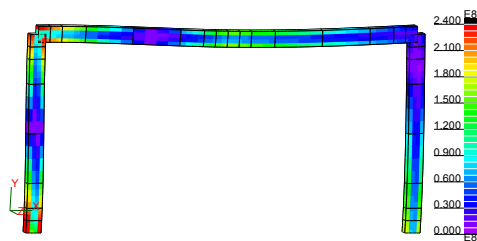


Abbildung 5.9: von Mises Spannungen am Punkt  $P_2$ .

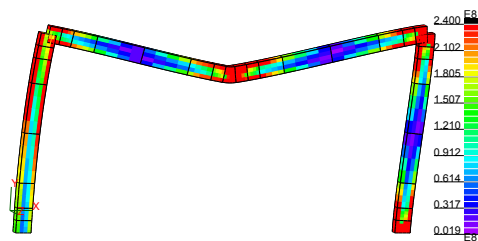


Abbildung 5.10: von Mises Spannungen am Grenzzustandspunkt  $P_3$ .

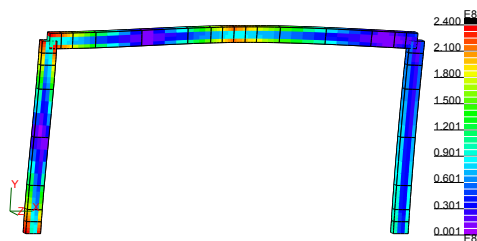


Abbildung 5.11: von Mises Spannungen am Punkt  $P_4$ .

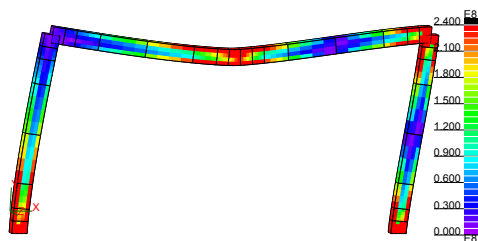


Abbildung 5.12: von Mises Spannungen am Grenzzustandspunkt  $P_5$ .

vollplastische Moment  $M_{pl}$  für den Rechteckquerschnitt ist

$$M_{pl} = \alpha_{pl} \frac{h^2 b}{6} f_y = 1.92 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

wobei der Formbeiwert  $\alpha_{pl} = 1.5$  ist.

### 5.2.3 Grenzzustand nach der Fließgelenktheorie I. Ordnung

Die analytische Näherungslösung zur Berechnung der Grenzzustandsfunktion erfolgt hier mit der Fließgelenktheorie. Mit der Aufstellung der virtuellen Arbeit

$$Hl\delta\phi = 4M_{pl}\delta\phi$$

an der kinematischen Seiten-Kette (vgl. Abbildung 5.3) ( $V = 0$ ) ergibt sich eine konstante Grenzzustandsfunktion für das Extremum der Horizontalkraft

$$g_1 = H = \frac{4M_{pl}}{l}$$

Für die kinematische Teil-Kette ( $H = 0$ ) ist die virtuelle Arbeit

$$Vl\delta\phi = 4M_{pl}\delta\phi$$

Somit ist das Minimum bzw. Maximum der Vertikalkraft wieder

$$g_2 = V = \frac{4M_{pl}}{l}$$

Die gemischte kinematische Kette liefert eine virtuelle Arbeit von

$$Hl\delta\phi + Vl\delta\phi = 6M_{pl}\delta\phi$$

und somit eine lineare Grenzzustandsfunktion  $V(H)$

$$g_3 = V = \frac{6M_{pl}}{l} - H$$

Die Grenzzustandsfunktion für die gesamte Struktur nach der Fließgelenktheorie ist dann

$$g(H, V) = \min(g_1, g_2, g_3) = 0$$

Ist, wie in diesem Fall, die Grenzzustandsfunktion explizit gegeben, kann die Versagenswahrscheinlichkeit mit Hilfe eines Simulationsverfahrens mit sehr geringem Aufwand berechnet werden, da nur entscheidend ist, ob eine Realisation von  $H$  und  $V$  innerhalb oder außerhalb von  $g(H, V) = 0$  ist. Die Abbildungen 5.5 und 5.6 verdeutlichen die Simulation mit dem adaptive sampling. Mit jeweils 1000 Realisationen in drei Simulationsläufen ergibt sich eine Versagenswahrscheinlichkeit von  $\hat{P}(F) = 1.1 \cdot 10^{-04}$ .

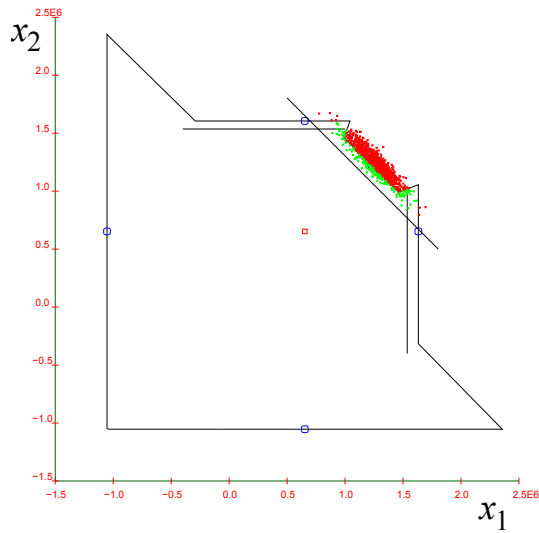


Abbildung 5.13: Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch Normalen-Hyperflächen.

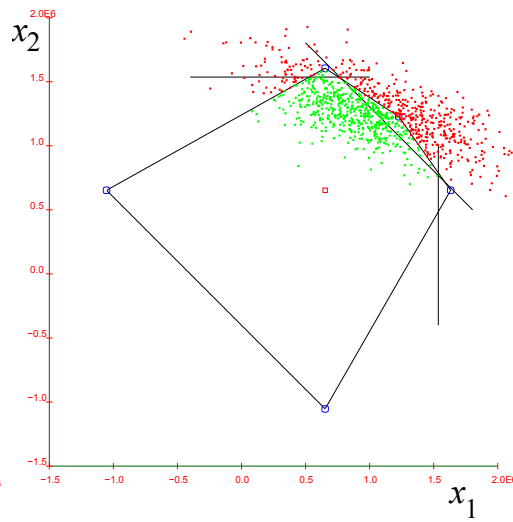


Abbildung 5.14: Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch Simplexe.

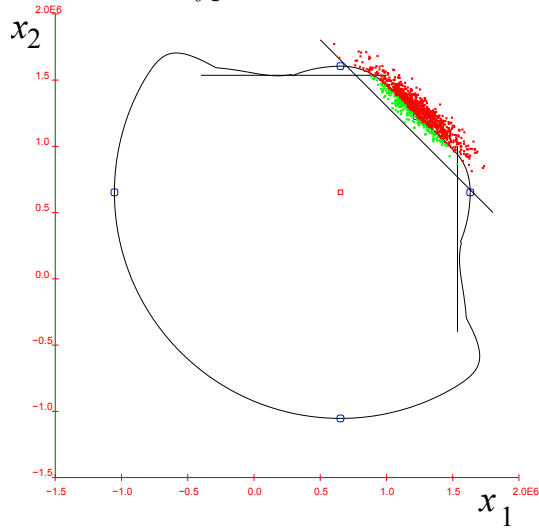


Abbildung 5.15: Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch gewichtete Radien.

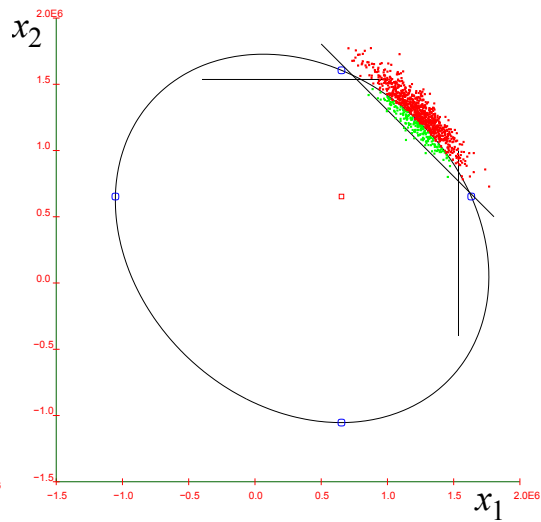
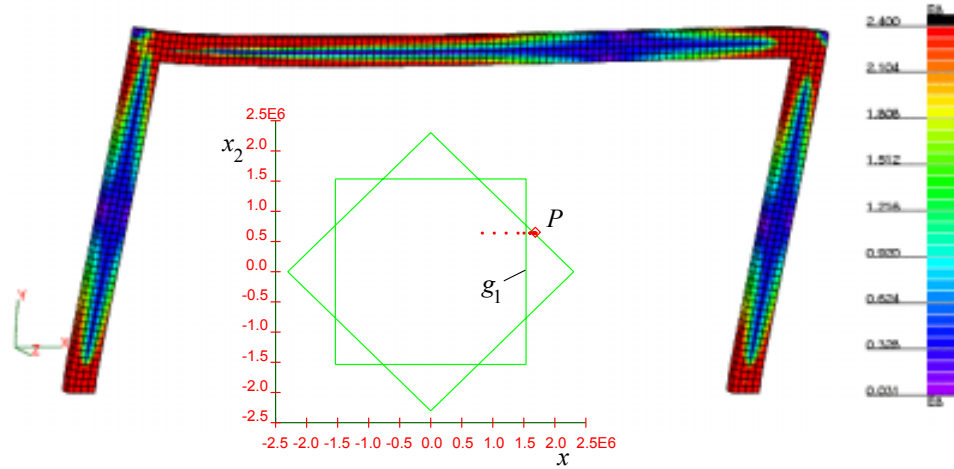


Abbildung 5.16: Polynomiale Interpolation der Grenzzustandsfunktion.



Abbildung 5.17: von Mises-Spannungen am Punkt  $P_1$ .

#### 5.2.4 Grenzzustand der nichtlinearen Finite-Elemente-Analyse

Der Grenzzustand der Struktur in Abhängigkeit von einer nichtlinearen Finite-Elemente-Analyse lässt sich punktweise mit dem directional sampling ermitteln (siehe Abschnitt 2.7). Die Lasten werden dazu von dem Punkt  $M(E[X_1], E[X_2])$  (siehe Abbildung 5.7) inkrementell so lange gesteigert, bis ein Versagen der Struktur eingetreten ist (vgl. dazu Abschnitt 3.4.1). Numerisch bedeutet dies, dass die Systemsteifigkeitsmatrix singulär ist (siehe Abschnitt 3.4.3). Die Fließgelenktheorie I. Ordnung berücksichtigt nicht den Einfluss der Normal- und Querkraften auf das Verhalten der Struktur im Grenzzustand. Wird z.B. die Grenzzustandsfunktion  $g_1 = H = 4 \frac{M_{pl}}{l} = 1.536 \cdot 10^6$  durch eine nichtlineare Finite-Elemente-Analyse mit einer sehr aufwändigen Diskretisierung der Struktur mit 20-knotigen Volumenelementen überprüft, ergibt sich ein Grenzzustandspunkt von  $P[1.686 \cdot 10^6, 6.528 \cdot 10^5]$  (vgl. Abbildung 5.17). Ein Kompromiss zwischen Genauigkeit der Ermittlung der Grenzzustandspunkte und Minimierung der Rechenzeit ist die Verwendung finiter Balkenelemente. Dafür wird die Struktur durch 32 Elemente diskretisiert (vgl. Abbildung 5.1). Die Elemententeilung ist in den Extremstellen des Biegemomenten-Verlaufes verdichtet. Für die numerische Integration über den Element-Querschnitt zur Ermittlung der Element-Matrizen der Tabelle 3.2 wird eine Gauss-Quadratur der Integrationsordnung  $4 \times 4$  verwendet. Mit diesem Modell ergibt sich ein Grenzzustandspunkt in Richtung der  $x_1$ -Achse von  $P_1[1.632 \cdot 10^6, 6.528 \cdot 10^5]$  (vgl. die Abbildungen 5.7 und 5.8).

Die Abbildung 5.4 zeigt 1500 ermittelte Grenzzustandspunkte. Die Grenzzustandspunkte im linken unteren Bereich ergeben sich dadurch, dass aus Gründen der Rechenzeit-Verringerung die Suche immer dann abgebrochen wurde, wenn nach einer Länge von  $r = 8$  eines Richtungsvektors im Raum

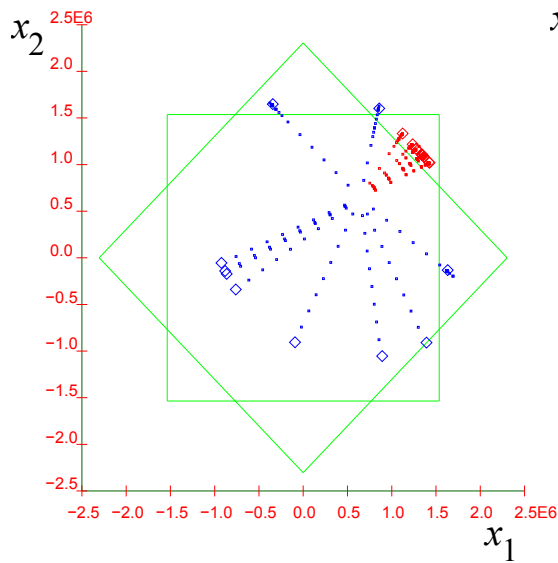


Abbildung 5.18: Adaptive Suche der Grenzzustandspunkte, ausgehend von 11 zufällig gewählten Richtungen und weiteren 11 adaptiv verbesserten Suchrichtungen.

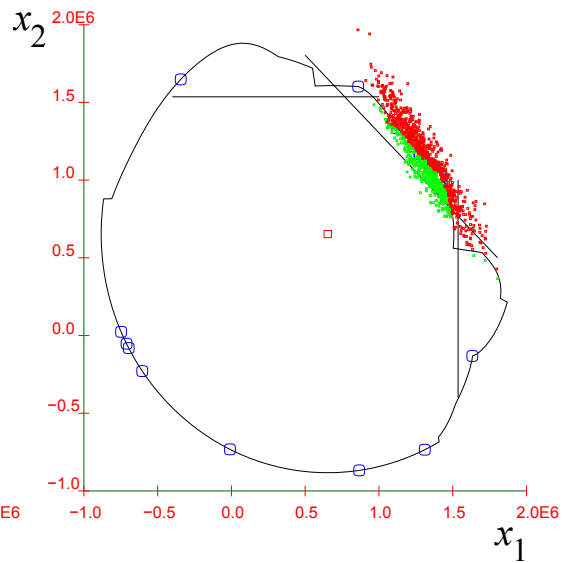


Abbildung 5.19: Interpolation der 22 Stützpunkte mit gewichteten Radien. Adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

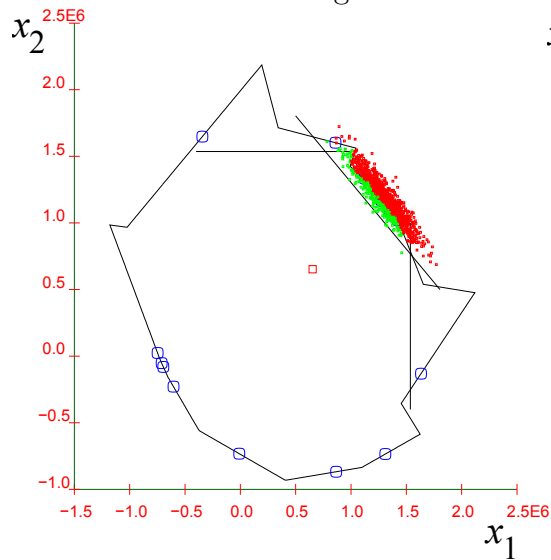


Abbildung 5.20: Interpolation der 22 Stützpunkte mit Normalen-Hyperebenen. Adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

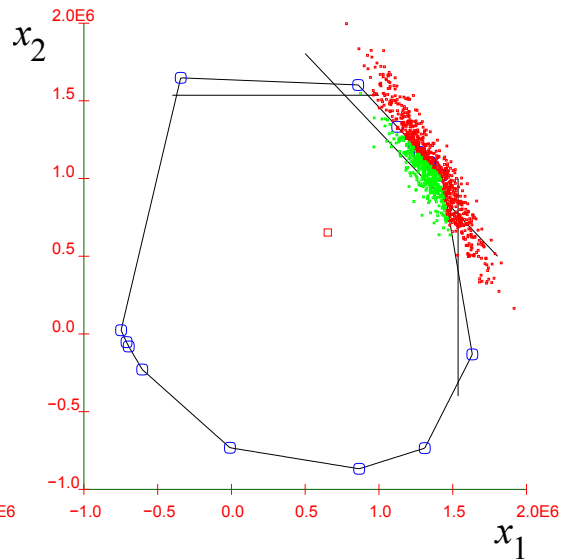


Abbildung 5.21: Interpolation der 22 Stützpunkte durch Simplexe. Adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

Verfahren	$p_f$
directional sampling ( $N = 1500$ )	$1.3 \cdot 10^{-5}$
Fließgelenktheorie	$1.1 \cdot 10^{-4}$
polynomiale Antwortfläche ( $N = 5$ )	$1.6 \cdot 10^{-5}$
Normalen-Hyperebenen ( $N = 5$ )	$1.1 \cdot 10^{-5}$
Sekanten-Hyperebene ( $N = 5$ )	$3.0 \cdot 10^{-5}$
gewichtete Radian ( $N = 5$ )	$9.7 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 5.1: Versagenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Verfahren

der standard-normalverteilten Zufallsvariablen noch kein Versagen der Struktur eingetreten war. Der Einfluss der bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten der Gleichung (2.14) auf die Versagenswahrscheinlichkeit nach Beziehung (2.13) ist dann vernachlässigbar.

Um die Rechenzeit noch weiter zu reduzieren, wurden die einzelnen nicht-linearen Finite-Elemente-Analysen zur Suche der Grenzzustandspunkte auf verschiedene Prozessoren einer SGI Origin 2000 verteilt. Die Monte-Carlo-Methoden und so auch das directional sampling sind ausgezeichnet dazu geeignet, auf einem Mehrprozessor-System oder auch auf einem workstation cluster verteilt zu werden, da die einzelnen Stichproben voneinander unabhängig sind. Insbesondere bei der Verwendung von ~~Strong~~ auf einem Unix-Betriebssystem ist die Parallelisierung und Verteilung von Prozessen leicht und effizient realisierbar. In diesem Beispiel generiert ein Steuerprozess eine Stichprobe von zufälligen Richtungen für die Grenzzustandssuche, verteilt dann threads auf die einzelnen Prozessoren und wartet bis diese threads beendet sind, um dann erneut zu verteilen. Dies geschieht so lange, bis alle Grenzzustandspunkte gefunden worden sind. Am Ende werden alle Stützpunkte von dem Steuerprozess eingelesen und die Versagenswahrscheinlichkeit nach Beziehung (2.13) berechnet.

Dadurch konnten die mit 1500 sehr reichlich gewählten Grenzzustandspunkte in insgesamt 4 Stunden unter der Nutzung von 15 R12000-Prozessoren bestimmt werden. Hierbei ergab sich die Versagenswahrscheinlichkeit zu  $\bar{P}(F) = 1.3 \cdot 10^{-5}$  mit einem Standardfehler zu  $\sigma_{\bar{P}(F)}^2 = 9.5636 \cdot 10^{-7}$ .

### 5.2.5 Interpolation der Grenzzustandsfunktion

Zunächst sollen die im Abschnitt 4.4 und 4.5 vorgestellten Interpolationsverfahren mit der polynomialen Interpolation des Abschnittes 4.3 mit  $N = p = n + \frac{n(n+1)}{2} = 5$  Grenzzustandspunkten verglichen werden. Die Abbildungen 5.7 bis 5.12 zeigen die gefunden Grenzzustände  $P_1, \dots, P_5$ . Die Abbildungen 5.13 bis 5.16 stellen die Simulation mit adaptive sampling dar. Mit jeweils 1000 Realisationen in drei Simulationsläufen ergeben sich die Versagenswahrscheinlichkeiten in Tabelle 5.1.

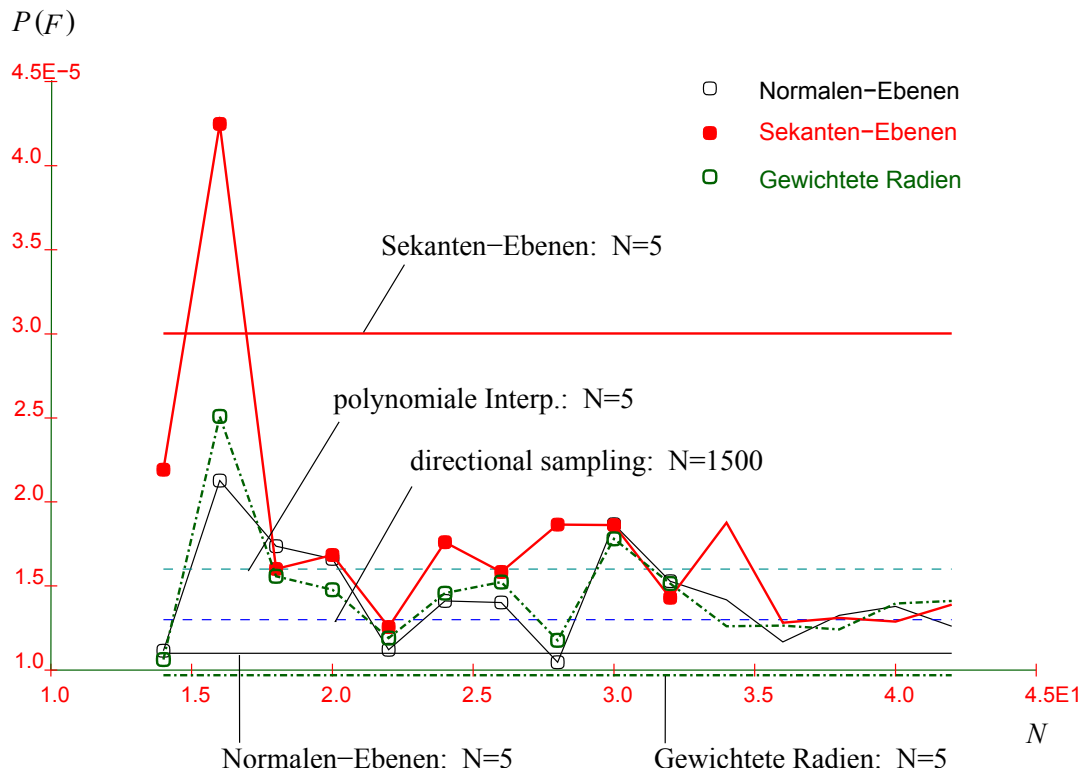


Abbildung 5.22: Konvergenz der Versagenswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit der Anzahl der verwendeten Grenzzustandspunkte  $N$ .

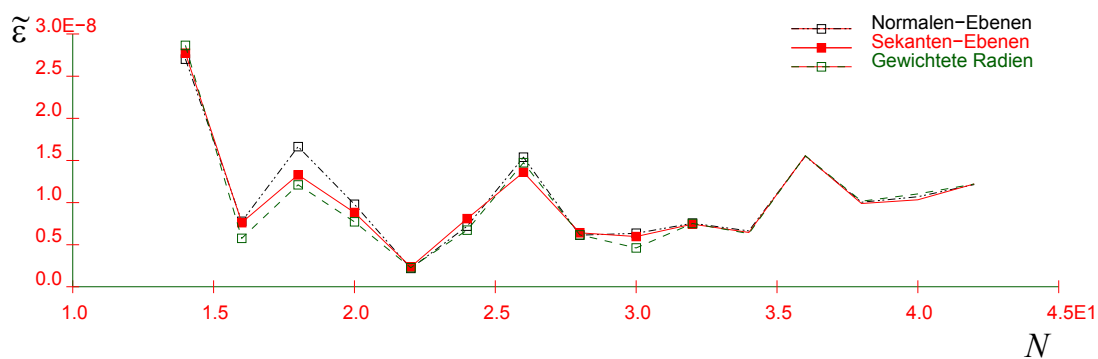


Abbildung 5.23: Interpolationsfehler  $\epsilon$  in Abhängigkeit der Anzahl der verwendeten Grenzzustandspunkte  $N$ .

Die Ergebnisse können mit den eingeführten Interpolationsverfahren verbessert werden, wenn  $N > p$  Grenzzustandspunkte zur Interpolation benutzt werden. Eine Möglichkeit der Auswahl der Richtungen, in denen Grenzzustandspunkte gesucht werden, wurde in Abschnitt 4.6 aufgezeigt. Ausgehend von zufällig gewählten Suchrichtungen werden weitere adaptiv verbesserte Suchrichtungen erzeugt und die dazugehörigen Grenzzustandspunkte berechnet. Die Abbildung 5.18 zeigt insgesamt  $N = 22$  auf diese Art und Weise gefundene Grenzzustandspunkte. Die Interpolation dieser Stützpunkte mit den vorgestellten Verfahren und die Ergebnisse des adaptive sampling nach der zweiten Adaption sind in den Abbildungen 5.19 bis 5.21 dargestellt. Abbildung 5.22 zeigt die Konvergenz der Versagenswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit der Anzahl der verwendeten Grenzzustandspunkte  $N$ . Die zugehörige Fehlerabschätzung durch Simulation (siehe Abschnitt 4.8) ist in Abbildung 5.23 dargestellt. Ab  $N = 36$  Stützpunkte können für dieses Beispiel sehr genaue Ergebnisse erhalten werden. Zum Vergleich sind zusätzlich die Versagenswahrscheinlichkeiten aus Tabelle 5.1 als durchgezogene Linien dargestellt. Diese Ergebnisse sind, da der Grenzzustandspunkt  $P_5(\mathbf{x})$  gerade mit dem  $\beta$ -Punkt zusammenfällt, ebenfalls ausreichend genau.

## 5.3 Plastisches Beulen einer Schalen-Struktur mit zufälligen Lasten und zufälliger Dicke

### 5.3.1 Einleitung

Wie in Abschnitt 4.6 gezeigt wurde, entspricht die vorgestellte adaptive Simulation der Einheitsvektoren dem adaptive directional sampling. Dieses zweite Beispiel der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit einer nichtlinearen Schalenstruktur mit zwei zufälligen Lasten und zufälliger, aber gleichmäßiger Dicke soll betrachtet werden, um die Ergebnisse der vorgestellten Antwortflächenverfahren mit denen des directional sampling und des adaptive directional sampling zu vergleichen.

### 5.3.2 Grenzzustand der nichtlinearen Finite-Elemente-Analyse

### 5.3.3 Mechanisches System und Zufallsgrößen

Die Finite-Elemente-Struktur wird aus 120 nichtlinearen Schalenelementen SHELL9N (vgl. Anhang A) modelliert. Das Materialverhalten der Struktur wird als elastisch-plastisch mit einer von-Mises-Fließbedingung ohne Verfestigung angenommen (vgl. Abschnitt 3.2.5). Die Fließspannung sei mit  $f_y = 2.4 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ , die Querdehnzahl mit  $\nu = 0.3$  und der Elastizitätsmodul

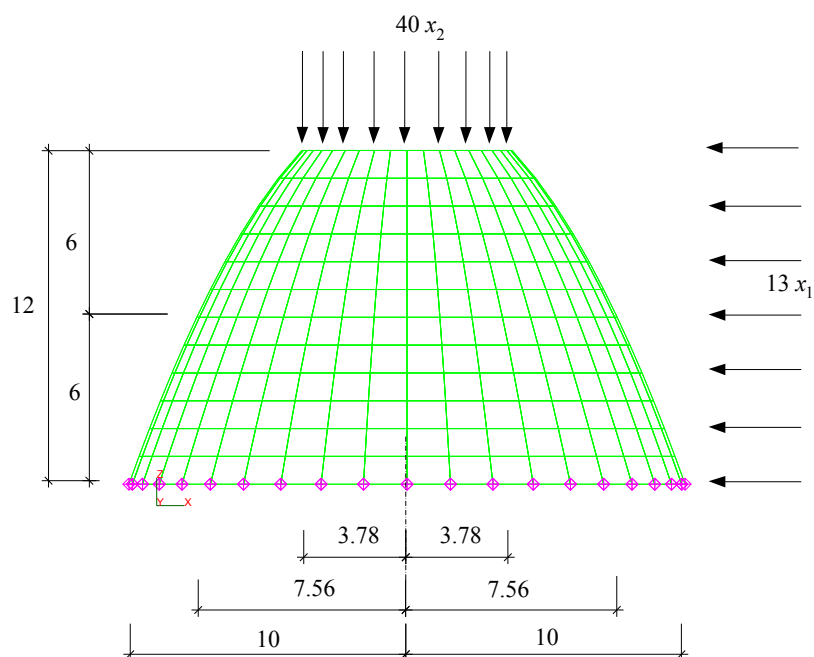


Abbildung 5.24: Finite-Elemente-Diskretisierung mit Lasten.

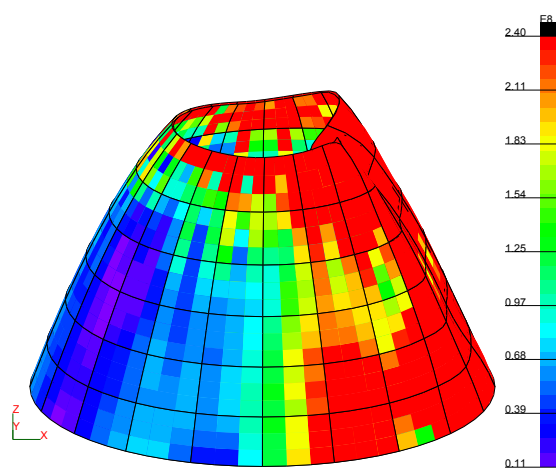


Abbildung 5.25: von-Mises-Spannungen und Verformungen an einem ausgewählten Grenzzustandspunkt.

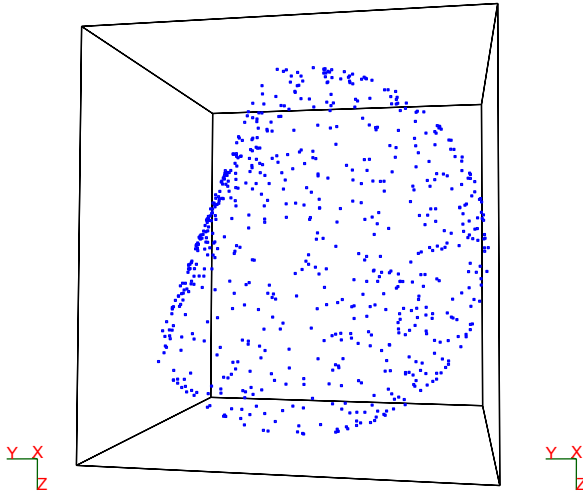


Abbildung 5.26: 700 zufällig verteilte Grenzzustandspunkte, im Raum unkorrelierter und standardnormalverteilter Zufallsvariablen.

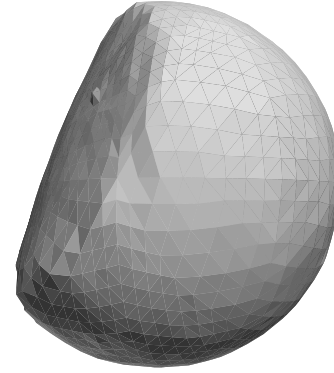


Abbildung 5.27: Grenzzustandsfunktion im Raum unkorrelierter und standardnormalverteilter Zufallsvariablen.

mit  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$  festgelegt. Die Struktur ist durch eine horizontale Linienlast  $13X_1$  und durch eine vertikale Linienlast  $40X_2$  belastet. Es wird angenommen, dass die Lasten unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen sind (vgl. 5.2).

### 5.3.4 Interpolation der Grenzzustandsfunktion

Die Mittelwerte der Lasten seien  $E[X_1] = 2.8 \cdot 10^7 \text{ N}$  und  $E[X_2] = 2 \cdot 10^7 \text{ N}$ . Die Standardabweichungen betragen  $\sigma_{X_1} = 3 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$  und  $\sigma_{X_2} = 1 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ . Die Schalendicke soll ebenfalls als eine normalverteilte Zufallsvariable mit  $E[X_3] = 0.5 \text{ m}$  und  $\sigma_{X_3} = 0.005 \text{ m}$  angenommen sein. Der Grenzzustand der Struktur in Abhängigkeit von einer nichtlinearen Finite-Elemente-Analyse sowie die Referenzlösung für die Versagenswahrscheinlichkeit sollen wieder punktweise mit dem directional sampling ermittelt werden (siehe Abschnitt 2.7). Die Lasten werden dazu vom Erwartungswert der Basisvariablen ausgehend inkrementell so lange gesteigert (vgl. dazu Abschnitt 3.4.1), bis ein Versagen der Struktur eingetreten ist, d.h. bis die Systemsteifigkeitsmatrix singulär ist (siehe Abschnitt 3.4.3). Die Abbildung 5.26 zeigt 700 auf diese Weise ermittelte Grenzzustandspunkte. Um die Rechenzeit zu reduzieren, wurden, wie in Beispiel 5.2 dargestellt, die einzelnen nichtlinearen Finite-Elemente-Analysen zur Suche der Grenzzustandspunkte auf verschiedene Prozessoren einer SGI Origin 2000 verteilt. Dadurch konnten die

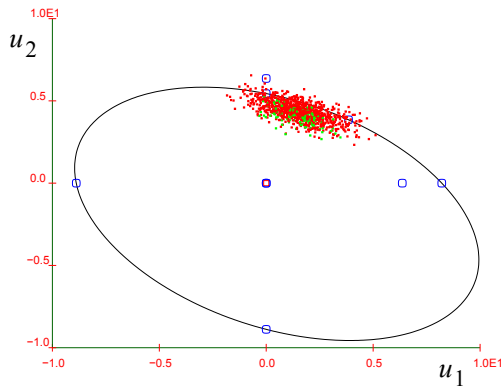


Abbildung 5.28:  $u_1$ - $u_2$ -Ebene, Schnitt durch die polynomiale Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit  $N = 9$  Grenzzustandspunkten und adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

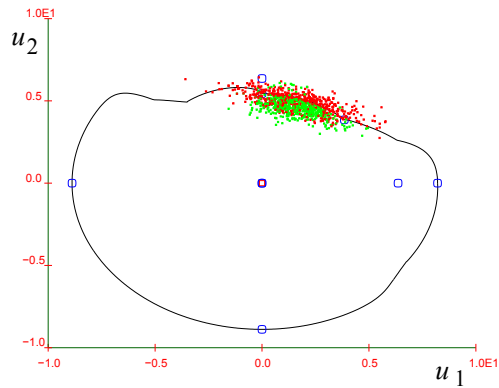


Abbildung 5.29:  $u_1$ - $u_2$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit gewichteten Radien und mit  $N = 9$  Grenzzustandspunkten und adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

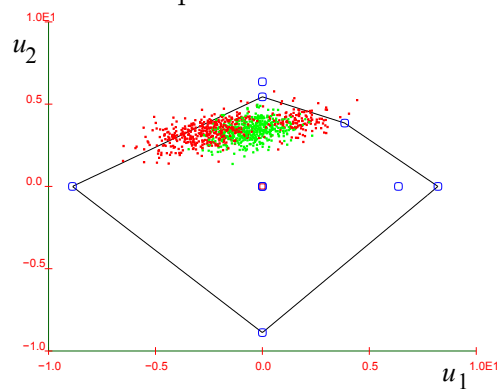


Abbildung 5.30:  $u_1$ - $u_2$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch Simplexe mit  $N = 9$  Grenzzustandspunkten, adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

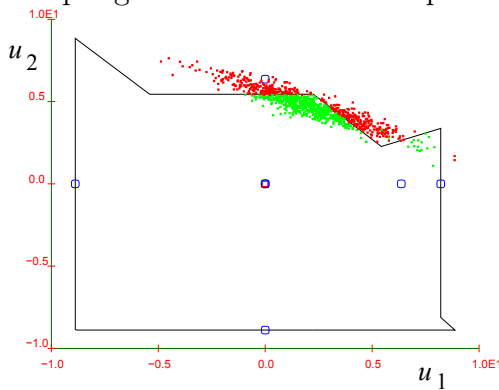


Abbildung 5.31:  $u_1$ - $u_2$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit Normalen-Ebenen und  $N = 9$  Grenzzustandspunkten, adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

Verfahren	$p_f$
directional sampling ( $N = 700$ )	$6.24 \cdot 10^{-6}$
polynomiale Antwortfläche ( $N = 9$ )	$8.70 \cdot 10^{-7}$
Normalen-Hyperebenen ( $N = 9$ )	$4.62 \cdot 10^{-8}$
Sekanten-Hyperebenen ( $N = 9$ )	$2.89 \cdot 10^{-5}$
gewichtete Radien ( $N = 9$ )	$1.14 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 5.2: Versagenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Verfahren



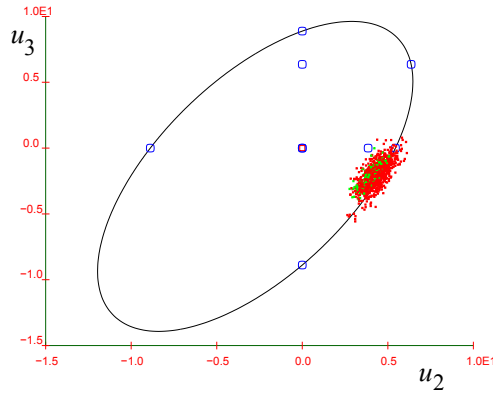


Abbildung 5.32:  $u_2$ - $u_3$ -Ebene, Schnitt durch die polynomiale Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit  $N = 9$  Grenzzustandspunkten und adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

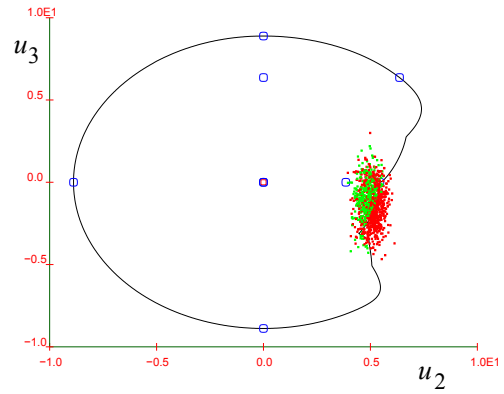


Abbildung 5.33:  $u_2$ - $u_3$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit gewichteten Radien und mit  $N = 9$  Grenzzustandspunkten und adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

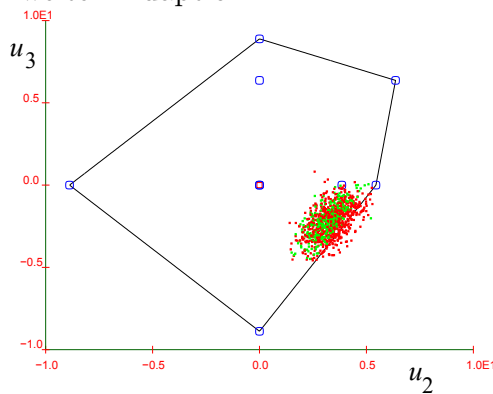


Abbildung 5.34:  $u_2$ - $u_3$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch Simplexe mit  $N = 9$  Grenzzustandspunkten, adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

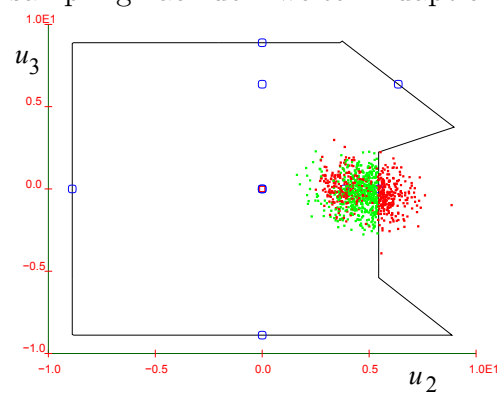


Abbildung 5.35:  $u_2$ - $u_3$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit Normalen-Ebenen und  $N = 9$  Grenzzustandspunkten, adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

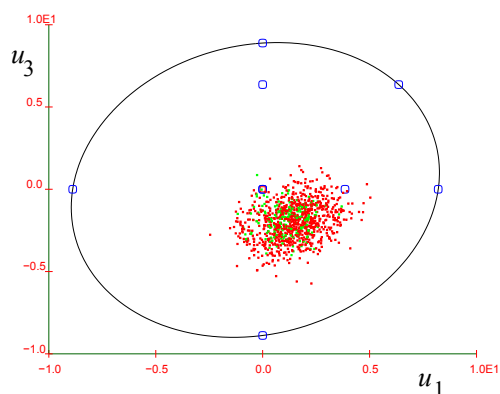


Abbildung 5.36:  $u_1$ - $u_3$ -Ebene, Schnitt durch die polynomiale Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit  $N = 9$  Grenzzustandspunkten und adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

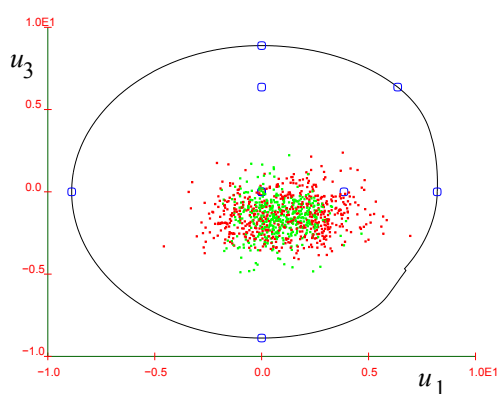


Abbildung 5.37:  $u_1$ - $u_3$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit gewichteten Radien und mit  $N = 9$  Grenzzustandspunkten und adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

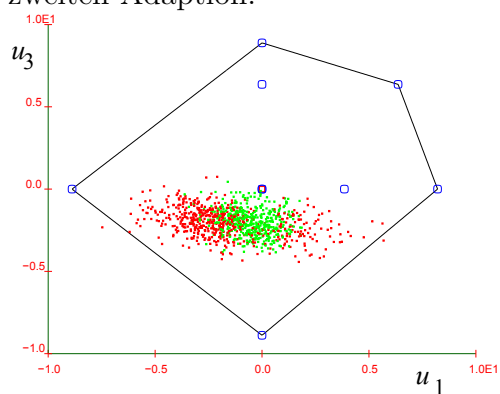


Abbildung 5.38:  $u_1$ - $u_3$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch Simplexe mit  $N = 9$  Grenzzustandspunkten, adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

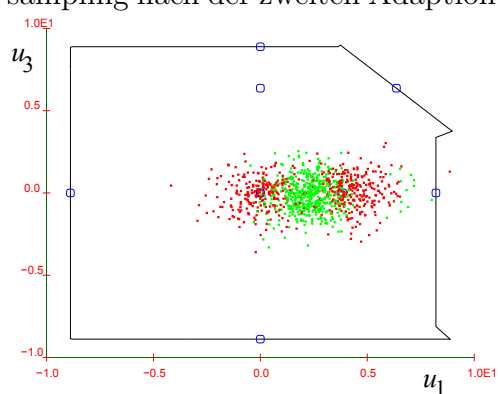


Abbildung 5.39:  $u_1$ - $u_3$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit Normalen-Ebenen und  $N = 9$  Grenzzustandspunkten, adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

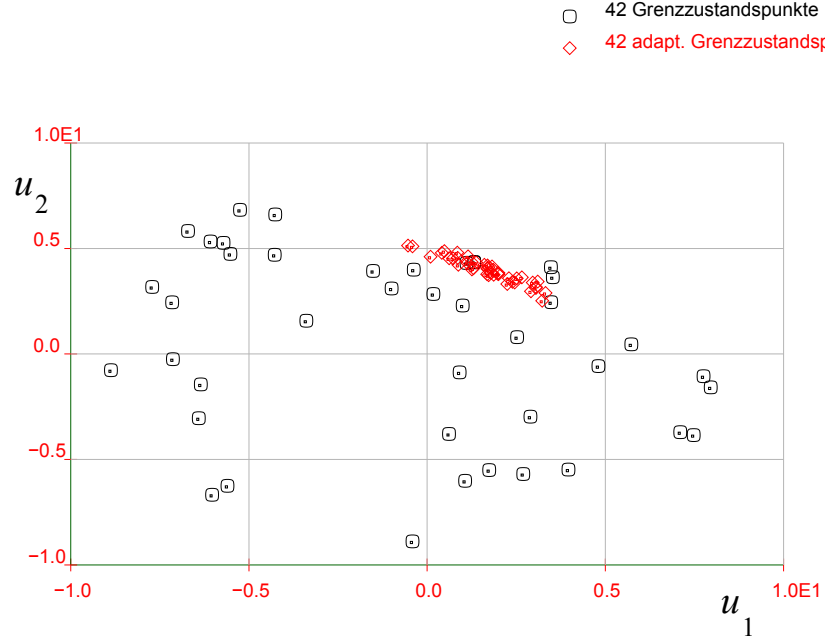


Abbildung 5.40: Projektion der 84 gefundenen Grenzzustandspunkte in die  $u_1$ - $u_2$ -Ebene.

$p = 700$  Grenzzustandspunkte in insgesamt 10 Stunden unter Nutzung von 14 R12000-Prozessoren bestimmt werden. Hierbei ergab sich die Versagenswahrscheinlichkeit zu  $\bar{P}(F) = 6.2357 \cdot 10^{-6}$  mit einem Standardfehler von  $\sigma_{\bar{P}(F)}^2 = 9.5434 \cdot 10^{-7}$ . Werden für die im Abschnitt 4.4 und 4.5 vorgestellten Interpolationsverfahren insgesamt  $N = p = n + \frac{n(n+1)}{2} = 9$  Grenzzustandspunkte verwendet, so können die errechneten Versagenswahrscheinlichkeiten mit dem Ergebnis der polynomialen Interpolation aus Abschnitt 4.3 verglichen werden (vgl. Abbildung 5.41). Die Abbildungen 5.28 bis 5.39 zeigen Schnitte durch die gefundenen Antwortflächenfunktionen und die zugehörigen Simulationen des adaptive sampling. Mit jeweils 1000 Realisationen in drei Simulationsläufen ergeben sich die Versagenswahrscheinlichkeiten der Tabelle 5.2.

Die Ergebnisse können erneut mit den eingeführten Interpolationsverfahren verbessert werden, wenn  $N > p$  Grenzzustandspunkte zur Interpolation benutzt werden. Abbildung 5.42 zeigt zum Beispiel  $N = 42$  Grenzzustandspunkte für zufällig gewählte Suchrichtungen. In den Abbildungen 5.43 und 5.40 sind zusätzlich noch  $N = 42$  Grenzzustandspunkte infolge der adaptiv verbesserten Suchrichtungen dargestellt. Die Interpolation dieser Stützpunkte mit den vorgestellten Verfahren und die Ergebnisse des adaptive sampling nach der zweiten Adaption werden in verdeutlichen die Abbildungen 5.44 bis 5.49. Abbildung 5.50 zeigt die Konvergenz der Versagenswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der Anzahl der verwendeten

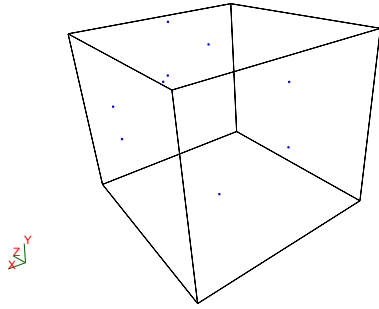


Abbildung 5.41:  $N = 9$  entsprechend Abschnitt 4.3 ermittelte Grenzzustandspunkte im Raum unkorrelierter und standardnormalverteilter Zufallsvariablen.

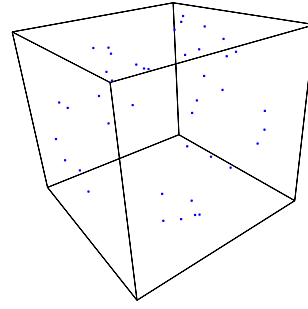


Abbildung 5.42: 42 Grenzzustandspunkte für zufällig gewählte Suchrichtungen im Raum unkorrelierter und standardnormalverteilter Zufallsvariablen.

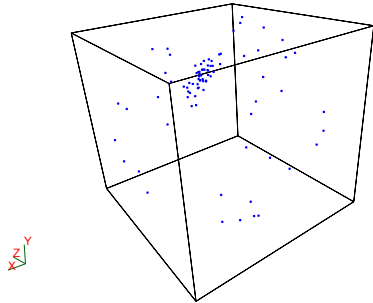


Abbildung 5.43: 42 Grenzzustandspunkte für zufällig gewählte Suchrichtungen und 42 Grenzzustandspunkte infolge adaptiv verbesserter Suchrichtungen im Raum unkorrelierter und standardnormalverteilter Zufallsvariablen.

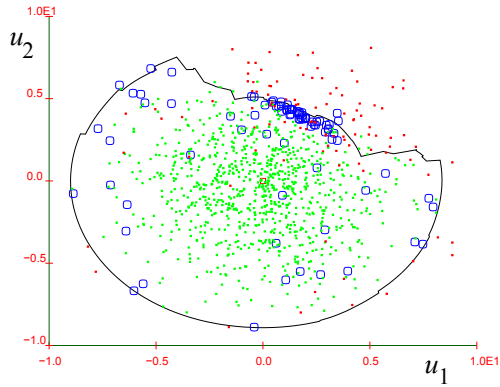


Abbildung 5.44:  $u_1$ - $u_2$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit gewichteten Radien und  $N = 84$  Grenzzustandspunkten und adaptive sampling nach dem ersten Simulationslauf.

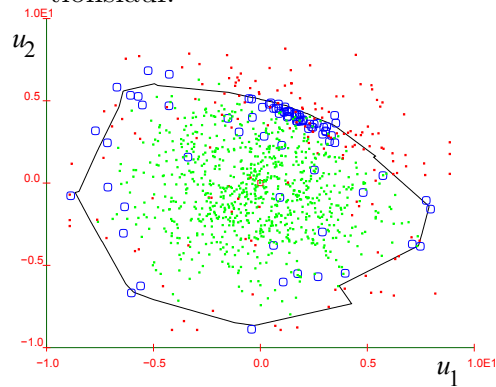


Abbildung 5.46:  $u_1$ - $u_2$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch Simplexe und  $N = 84$  Grenzzustandspunkten und adaptive sampling nach dem ersten Simulationslauf.

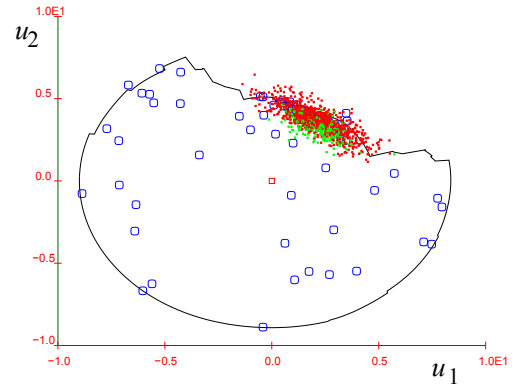


Abbildung 5.45:  $u_1$ - $u_2$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit gewichteten Radien und  $N = 84$  Grenzzustandspunkten und adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

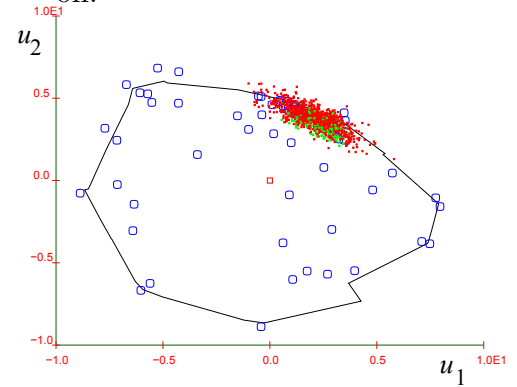


Abbildung 5.47:  $u_1$ - $u_2$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion durch Simplexe und  $N = 84$  Grenzzustandspunkten und adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

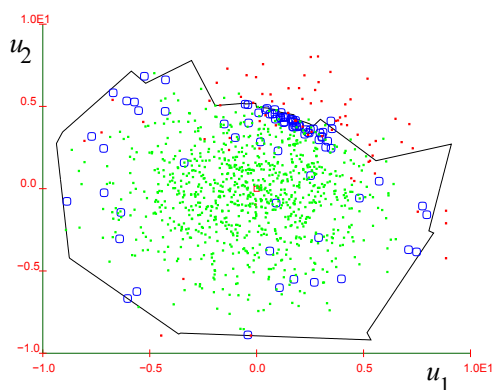


Abbildung 5.48:  $u_1$ - $u_2$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit Normalen-Ebenen und  $N = 84$  Grenzzustandspunkten und adaptive sampling nach dem ersten Simulationslauf.

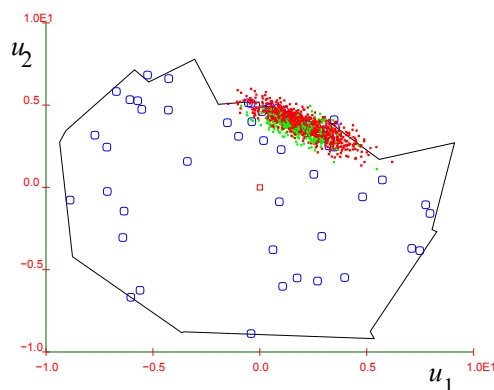


Abbildung 5.49:  $u_1$ - $u_2$ -Ebene, Schnitt durch die Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit Normalen-Ebenen und  $N = 84$  Grenzzustandspunkten und adaptive sampling nach der zweiten Adaption.

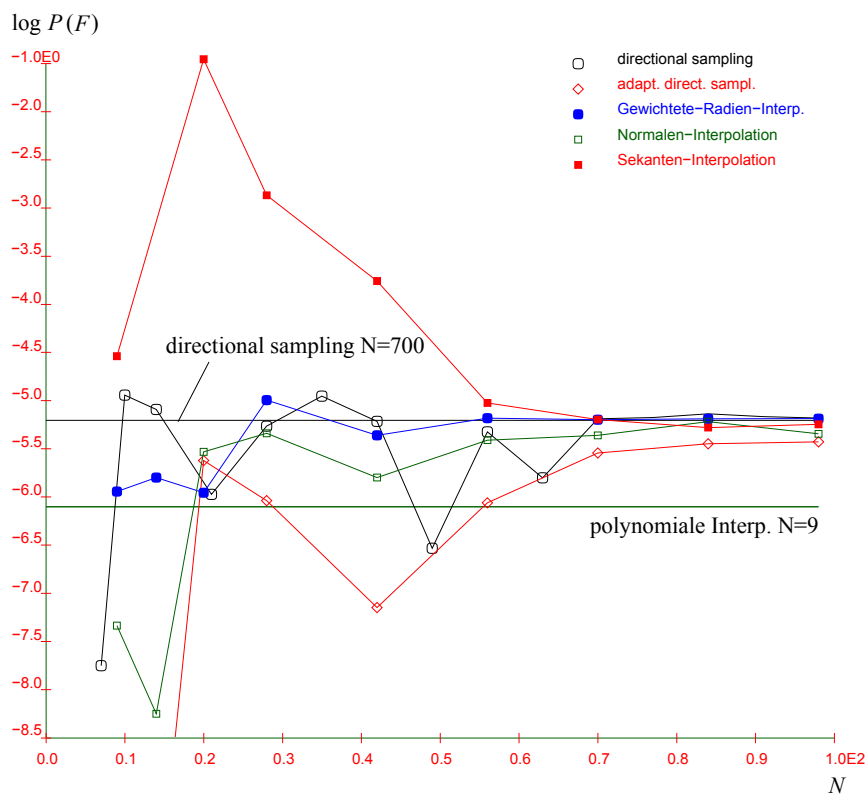


Abbildung 5.50: Konvergenz der Versagenswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit der Anzahl der verwendeten Grenzzustandspunkte  $N$ .

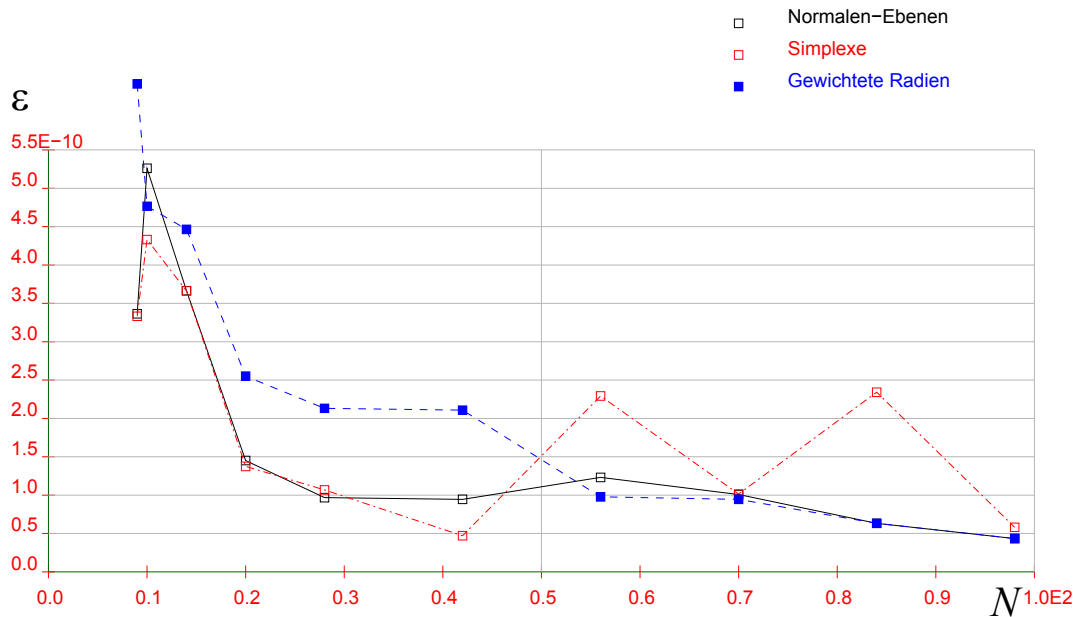


Abbildung 5.51: Interpolationsfehler  $\tilde{\epsilon}$  in Abhängigkeit der Anzahl der verwendeten Grenzzustandspunkte  $N$ .

Grenzzustandspunkte  $N$ . Die zugehörige Fehlerabschätzung durch Simulation (siehe Abschnitt 4.8) und die Ergebnisse der Tabelle 5.2 sind in Abbildung 5.23 dargestellt. Die langsame Konvergenz der Interpolation durch Simplexe mit zu großen Abschätzungen der Versagenswahrscheinlichkeit ist nicht überraschend, da diese eine konsistent auf der sicheren Seite liegende Interpolation darstellt. Die Interpolationen mit gewichteten Radian und mit Normalen-Ebenen konvergieren sehr rasch, so dass ab  $N = 38$  Stützstellen die Versagenswahrscheinlichkeit gut geschätzt wird. Ab  $N = 70$  Stützpunkte können für dieses Beispiel auch mit der Interpolation durch Simplexe und mit dem directional sampling sehr genaue Ergebnisse erhalten werden.

## 5.4 Nichtlineare Analyse einer Stahlhalle mit mehreren Zufallslasten

### 5.4.1 Statisches System

Das dritte und letzte Beispiel demonstriert die Anwendbarkeit der vorgestellten Interpolationsverfahren auf wirklichkeitsnahe Systeme und Einwirkungsgrößen. Die untersuchte Struktur soll eine Stahlhalle sein, wobei die Analyse auf das mittlere Hallensegment, bestehend aus zwei biegesteifen Rahmentragwerken, die durch einen Windverband ausgesteift sind, beschränkt ist. Durch die Gliederung des Systems (siehe Abbildung 5.52) in Haupttrahmen,

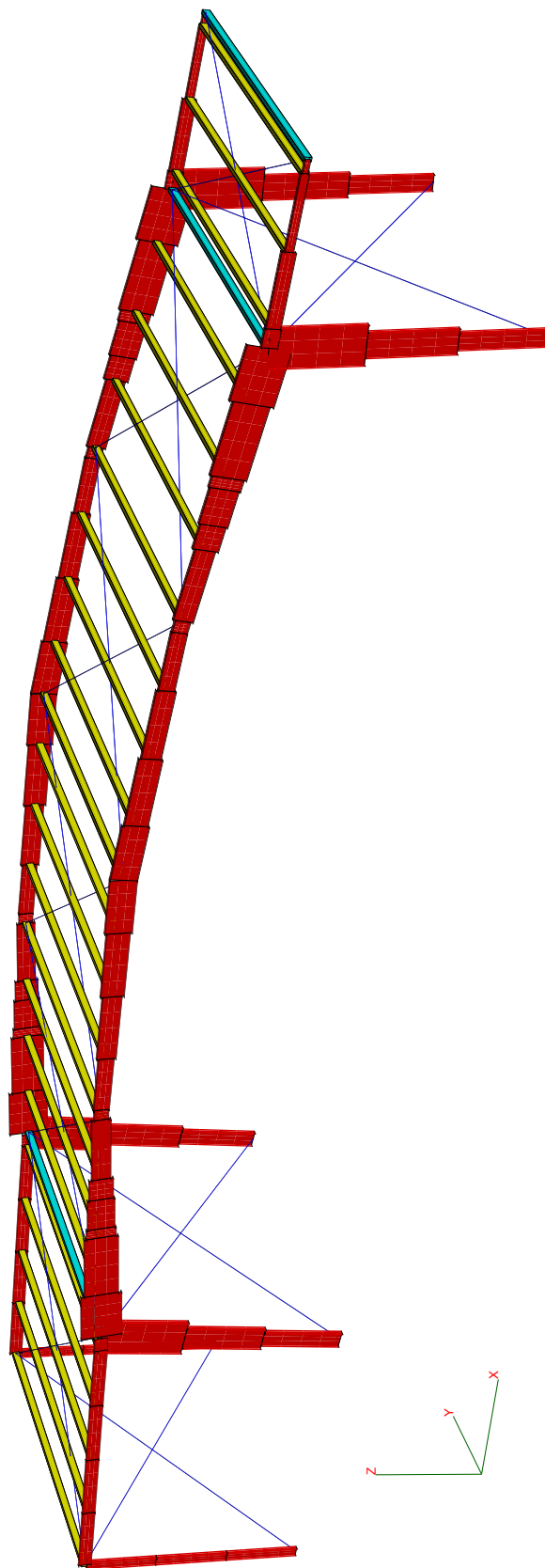


Abbildung 5.52: Perspektive des Hallensegmentes



Anbau und auskragenden Teil erweist sich dieses System als besonders komplex. Die Hallenstützen sind verdrehbar, aber unverschieblich gelagert, und der Anbau soll ein angehängter Dreigelenkrahmen (siehe Abbildung 5.56) sein. In der sowohl geometrisch als auch physikalisch nichtlinearen Strukturanalyse werden alle möglichen Grenzzustände des Abschnittes 3.4 berücksichtigt. Lokales Systemversagen, wie zum Beispiel lokales Beulen oder Versagen der Anschlüsse, wird nicht untersucht. Für eine Untersuchung des Grenzzustandes im Falle der Gebrauchstauglichkeit wurde die maximale horizontale Verschiebung auf 0.02 mm und die maximale vertikale Verschiebung des Rahmens auf 0.1 mm begrenzt. Das nichtlineare Materialverhalten des Stahles wurde durch die Verwendung eines linear elastisch - ideal plastischen Materialgesetzes berücksichtigt. Die Streckgrenze von Stahl wird im Allgemeinen durch die Spannung  $\sigma_{0.2}$ , bei der sich nach einer Entlastung eine bleibende Dehnung von 0.2 % einstellt, definiert. Die einzelnen Profile sind aus Blechen zusammengeschweißt, die verschiedenen Herstellerwerken entstammen sollen. Nach Spaethe (1987) ist für einen solchen Fall ein Variationskoeffizient der Streckgrenze von 0.06 bis 0.12 anzunehmen. In dem vorliegenden Fall soll ein Variationskoeffizient von 0.10 festgelegt werden. Alle Profile (siehe Tabelle 5.3) des Hallenrahmens sollen aus St52 gefertigt werden. Der Mittelwert der Streckgrenze soll mit  $392 \text{ N/mm}^2$  angenommen werden (Spaethe (1987)). Für den Variationskoeffizienten des Elastizitätsmoduls werden in Spaethe (1987) Werte zwischen 0.02 und 0.06 vorgeschlagen. Hier soll der Maximalwert angenommen werden. Der Mittelwert des Elastizitätsmoduls sei  $2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ . Häufig werden als Verteilungstypen die Normalverteilung, die logarithmische Normalverteilung, die gestutzte Normalverteilung oder die Beta-Verteilung verwendet. Desweiteren weisen die Stichproben durch die Qualitätskontrollen des Herstellers eine positive Schiefe und einen positiven Minimalwert auf. Demnach erscheint die Verwendung einer verschobenen logarithmischen Normalverteilung für die Beschreibung der Streckgrenze und des Elastizitätsmoduls gut geeignet zu sein (Spaethe (1987)).



Tabelle 5.3: Verwendete Elementtypen und Abmessungen

Elementtypen und Abmessungen									
Element- nummer	Stang - Elementtyp	Abmessungen (vgl. Abb. 5.53 bis 5.55) in [mm]							
		A	B	t1	H	t2	C	D	t3
1	III	0.065	0.065	0.006	0.188	0.004	0.065	0.065	0.006
2	III	wie vorher							
3	III	wie vorher							
4	III	0.055	0.055	0.004	0.280	0.004	0.055	0.055	0.004
5	III	wie vorher							
6	III	wie vorher							
7	III	wie vorher							
8	III	0.065	0.065	0.006	0.863	0.004	0.065	0.065	0.006
9	III	0.065	0.065	0.006	0.719	0.004	0.065	0.065	0.006
10	III	0.065	0.065	0.006	0.624	0.004	0.065	0.065	0.006
11	III	0.075	0.075	0.006	0.345	0.005	0.075	0.075	0.006
12	III	0.075	0.075	0.006	0.510	0.005	0.075	0.075	0.006
13	III	0.075	0.075	0.006	0.805	0.005	0.075	0.075	0.006
14	III	0.065	0.065	0.006	0.570	0.005	0.065	0.065	0.006
15	III	0.065	0.065	0.006	0.505	0.005	0.065	0.065	0.006
16	III	0.065	0.065	0.006	0.395	0.005	0.065	0.065	0.006
17	III	0.065	0.065	0.006	0.301	0.005	0.065	0.065	0.006
18	III	0.065	0.065	0.006	0.318	0.005	0.065	0.065	0.006
19	III	0.065	0.065	0.006	0.393	0.005	0.065	0.065	0.006
20	III	0.065	0.065	0.006	0.475	0.005	0.065	0.065	0.006
21	III	0.065	0.065	0.006	0.550	0.005	0.065	0.065	0.006
22	III	wie vorher							
23	III	0.065	0.065	0.006	0.863	0.004	0.065	0.065	0.006
24	III	0.065	0.065	0.006	0.719	0.004	0.065	0.065	0.006
25	III	0.075	0.075	0.006	0.345	0.005	0.075	0.075	0.006
26	III	0.075	0.075	0.006	0.510	0.005	0.075	0.075	0.006
27	III	0.075	0.075	0.006	0.805	0.005	0.075	0.075	0.006
28	III	0.065	0.065	0.006	0.570	0.005	0.065	0.065	0.006
29	III	0.065	0.065	0.006	0.505	0.005	0.065	0.065	0.006
30	III	0.065	0.065	0.006	0.395	0.005	0.065	0.065	0.006
31	III	0.065	0.065	0.006	0.318	0.005	0.065	0.065	0.006
32	III	0.065	0.065	0.006	0.393	0.005	0.065	0.065	0.006
33	III	0.065	0.065	0.006	0.475	0.005	0.065	0.065	0.006
34	III	0.065	0.065	0.006	0.624	0.004	0.065	0.065	0.006
35	III	0.065	0.065	0.006	0.301	0.005	0.065	0.065	0.006
36	III	0.065	0.065	0.006	0.188	0.004	0.065	0.065	0.006

Element- nummer	Stang - Elementtyp	Abmessungen (vgl. Abb. 5.53 bis 5.55) in [mm]
37	III	wie vorher
38	III	wie vorher
39	III	0.055 0.055 0.004 0.280 0.004 0.055 0.055 0.004
40	III	wie vorher
41	III	wie vorher
42	III	wie vorher
43	III	0.065 0.065 0.006 0.863 0.004 0.065 0.065 0.006
44	III	0.065 0.065 0.006 0.719 0.004 0.065 0.065 0.006
45	III	0.065 0.065 0.006 0.624 0.004 0.065 0.065 0.006
46	III	0.075 0.075 0.006 0.345 0.005 0.075 0.075 0.006
47	III	0.075 0.075 0.006 0.510 0.005 0.075 0.075 0.006
48	III	0.075 0.075 0.006 0.805 0.005 0.075 0.075 0.006
49	III	0.065 0.065 0.006 0.570 0.005 0.065 0.065 0.006
50	III	0.065 0.065 0.006 0.505 0.005 0.065 0.065 0.006
51	III	0.065 0.065 0.006 0.395 0.005 0.065 0.065 0.006
52	III	0.065 0.065 0.006 0.301 0.005 0.065 0.065 0.006
53	III	0.065 0.065 0.006 0.318 0.005 0.065 0.065 0.006
54	III	0.065 0.065 0.006 0.393 0.005 0.065 0.065 0.006
55	III	0.065 0.065 0.006 0.475 0.005 0.065 0.065 0.006
56	III	0.065 0.065 0.006 0.550 0.005 0.065 0.065 0.006
57	III	wie vorher
58	III	0.065 0.065 0.006 0.863 0.004 0.065 0.065 0.006
59	III	0.065 0.065 0.006 0.719 0.004 0.065 0.065 0.006
60	III	0.075 0.075 0.006 0.345 0.005 0.075 0.075 0.006
61	III	0.075 0.075 0.006 0.510 0.005 0.075 0.075 0.006
62	III	0.075 0.075 0.006 0.805 0.005 0.075 0.075 0.006
63	III	0.065 0.065 0.006 0.570 0.005 0.065 0.065 0.006
64	III	0.065 0.065 0.006 0.505 0.005 0.065 0.065 0.006
65	III	0.065 0.065 0.006 0.395 0.005 0.065 0.065 0.006
66	III	0.065 0.065 0.006 0.318 0.005 0.065 0.065 0.006
67	III	0.065 0.065 0.006 0.393 0.005 0.065 0.065 0.006
68	III	0.065 0.065 0.006 0.475 0.005 0.065 0.065 0.006
69	III	0.065 0.065 0.006 0.624 0.004 0.065 0.065 0.006
70	III	0.065 0.065 0.006 0.301 0.005 0.065 0.065 0.006
71	III	0.065 0.065 0.005 0.310 0.005 0.065 0.065 0.005
72	III	0.065 0.065 0.005 0.275 0.005 0.065 0.065 0.005
73	III	0.065 0.065 0.005 0.157 0.005 0.065 0.065 0.005
74	III	0.065 0.065 0.005 0.096 0.005 0.065 0.065 0.005
75	III	0.065 0.065 0.005 0.310 0.005 0.065 0.065 0.005
76	III	0.065 0.065 0.005 0.275 0.005 0.065 0.065 0.005
Fortsetzung nächste Seite ...		

Element- nummer	Stang - Elementtyp	Abmessungen (vgl. Abb. 5.53 bis 5.55) in [mm]
77	III	0.065 0.065 0.005 0.157 0.005 0.065 0.065 0.005
78	III	0.065 0.065 0.005 0.096 0.005 0.065 0.065 0.005
		W H
79	RECT	0.080 0.150
80	RECT	wie vorher
81	RECT	wie vorher
82	RECT	wie vorher
83	RECT	wie vorher
84	RECT	wie vorher
85	RECT	wie vorher
86	RECT	wie vorher
87	RECT	wie vorher
88	RECT	wie vorher
89	RECT	wie vorher
90	RECT	wie vorher
91	RECT	wie vorher
92	RECT	wie vorher
93	RECT	wie vorher
94	RECT	wie vorher
95	RECT	wie vorher
96	RECT	wie vorher
97	RECT	wie vorher
98	RECT	wie vorher
99	RECT	wie vorher
100	RECT	wie vorher
101	RECT	wie vorher
102	RECT	wie vorher
103	RECT	wie vorher
		R
104	TRUSS2N	0.0002
105	TRUSS2N	wie vorher
106	TRUSS2N	wie vorher
107	TRUSS2N	wie vorher
108	TRUSS2N	wie vorher
109	TRUSS2N	wie vorher
110	TRUSS2N	wie vorher
111	TRUSS2N	wie vorher
112	TRUSS2N	wie vorher
113	TRUSS2N	wie vorher
114	TRUSS2N	wie vorher
Fortsetzung nächste Seite ...		

Element- nummer	Stang - Elementtyp	Abmessungen (vgl. Abb. 5.53 bis 5.55) in [mm]
115	TRUSS2N	wie vorher
116	TRUSS2N	wie vorher
117	TRUSS2N	wie vorher
118	TRUSS2N	wie vorher
119	TRUSS2N	wie vorher
120	TRUSS2N	wie vorher
121	TRUSS2N	wie vorher
		W    H
122	RECT	0.080 0.150
		A    B    t1    H    t2    C    D    t3
123	III	0.055 0.055 0.004 0.280 0.004 0.055 0.055 0.004
124	III	wie vorher

## 5.4.2 Modellierung der Einwirkungsunsicherheiten

### Installationslast

Installationslasten sollen einzeln und unabhängig auf die Bereiche I und II (siehe Abbildung 5.56) des Tragwerkes aufgebracht werden. Für den Mittelwert soll  $0.3 \text{ kN/m}^2$  und für die Standardabweichung  $0.15 \text{ kN/m}^2$  angenommen werden.

### Eigenlasten

Die Dichte von Stahl wird mit  $7850 \text{ kg/m}^3$  als konstant angenommen. Mögliche Abweichungen der Geometrie der Profile werden hier vernachlässigt, da dies zu einer sehr großen Anzahl an Zufallsvariablen (für jede Abmessung eine) führen würde.

### Dachlasten

Die Dachlasten werden durch eine logarithmisch normalverteilte Zufallsvariable mit einem Mittelwert von  $0.489 \text{ kN/m}^2$  und einer Standardabweichung von  $0.03 \text{ kN/m}^2$  berücksichtigt.

### Schneelast

Die Dachschneelasten sollen mit dem folgenden Ansatz

$$S_D = K \cdot F \cdot E \cdot T \cdot S_B$$

berücksichtigt werden (siehe z.B. Rackwitz (1997)). Hierin ist

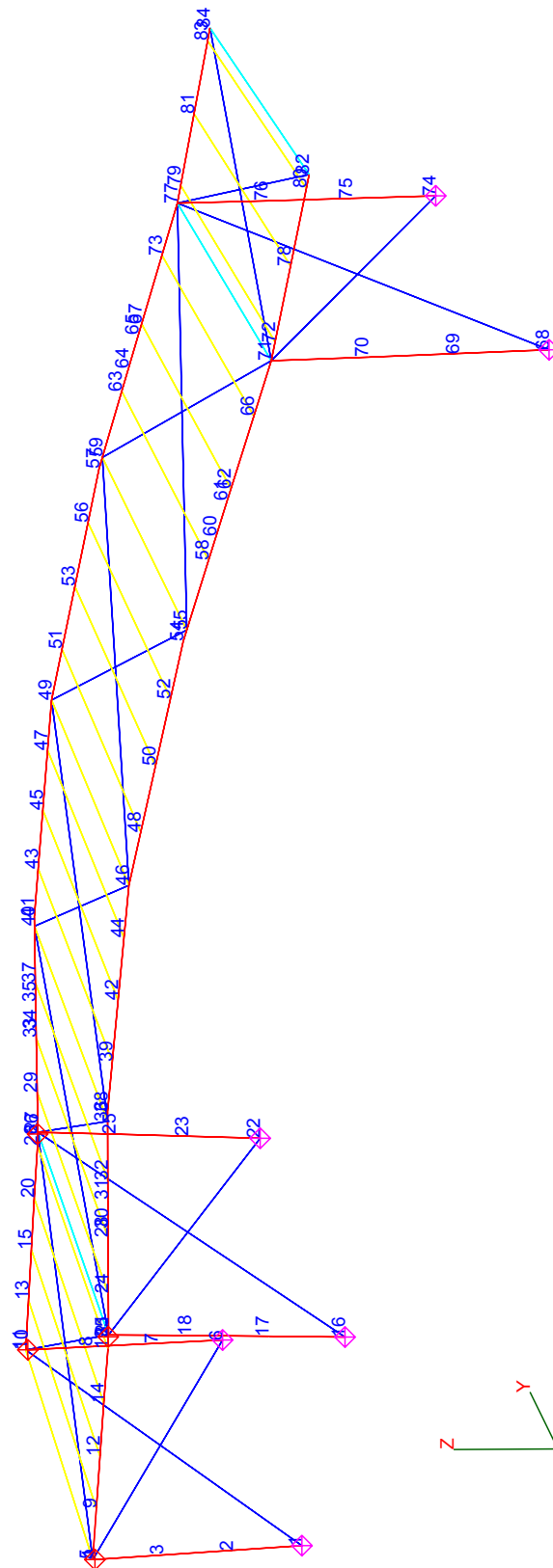


Abbildung 5.57: Finite-Elemente-Knoten der Halle

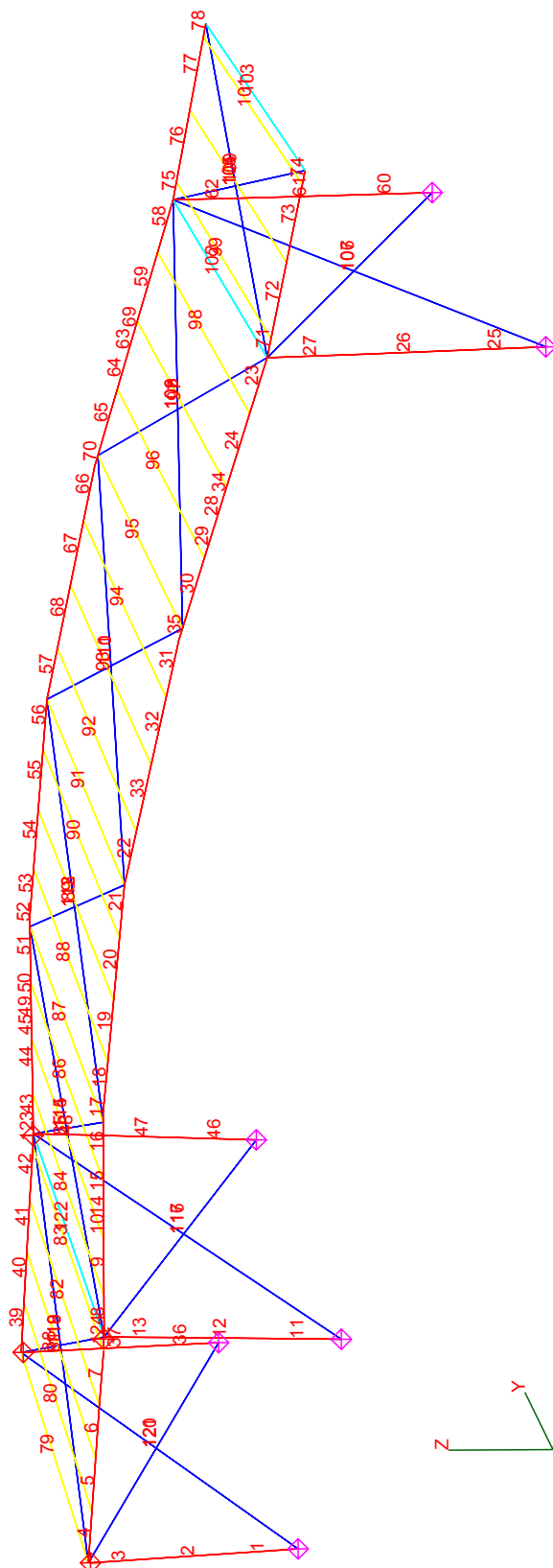


Abbildung 5.58: Finite Elemente der Halle



$K \leq 1.0$  ein Umrechnungsfaktor für die Grundsneelasten auf Dächer,

$F$  ein Formfaktor für vom Flachdach abweichende Dachformen,

$0.7 \leq E \leq 1.0$  ein Faktor zur Berücksichtigung des Windeinflusses,

$0.8 \leq T \leq 1.0$  ein Faktor zur Berücksichtigung der Wärmeabgabe des Daches und

$S_B$  die Bodensneelast.

In dem vorliegenden Beispiel ist  $K = 0.8$  und  $F = E = T = 1.0$  gewählt worden. Die Bodensneelast kann aus

$$S_B = \rho_m(s) g S V$$

ermittelt werden. Hierin ist  $S$  [m] eine Zufallsvariable für den Extremwert der Schneehöhe. Die Schneedichte  $\rho_m(S)$  lässt sich aus

$$\rho_m(S) = \frac{\rho_\infty \lambda}{S} \ln \left( 1 + \frac{\rho_0}{\rho_\infty} \left( \exp \left( \frac{S}{\lambda} \right) - 1 \right) \right)$$

berechnen. Dabei soll die Dichte an der Oberfläche der Schneedecke  $\rho_0 = 170 \text{ kg/m}^3$  betragen. Der obere Grenzwert der Dichte sei  $\rho_\infty = 500 \text{ kg/m}^3$  und die Skalierungskonstante  $\lambda = 0.85 \text{ m}$ . Die in Rackwitz (1997) genannte Streuung der Berechnung der Bodensneelast im Vergleich mit Beobachtungsergebnissen wird durch eine zusätzliche logarithmisch normalverteilte Zufallsvariable  $V$  mit dem Mittelwert 1 und mit einem Variationskoeffizienten von 0.2 berücksichtigt. Der Mittelwert und die Standardabweichung für ein jährliches Schneehöhenmaximum können mit den Übersichtsbeziehungen

$$E[S_1] \approx A(\text{Klimazone}) k^{\frac{h}{h_0}}$$

$$\sigma_S \approx A(\text{Klimazone}) k^{\frac{h}{2h_0}}$$

ermittelt werden. Der Klimafaktor ergibt sich bei Beachtung einer angenommenen Schneelastzone III (DIN1055) zu  $A = 15 \text{ cm}$  (Rackwitz (1997)). Mit der Bezugshöhe  $h_0 = 300 \text{ m}$ , einer angenommenen Standorthöhe von  $h = 600 \text{ m}$  über NN und einem Parameter der Gammaverteilung für die Schneehöhe von  $k = 1.5$  erhält man  $E[S_1] = 0.3375 \text{ m}$  und  $\sigma_S = 0.2250 \text{ m}$ . Der Mittelwert kann für einen Bezugszeitraum von 10 Jahren aus

$$E[S_{10}] = E[S_1] + \frac{\sqrt{6}\sigma_S(\ln 10 - 0.577216)}{\pi} = 0.6402 \text{ m}$$

errechnet werden (z.B. Spaethe (1987)).

Die Dachschneelasten sind auf die horizontale Einheitsfläche bezogen. Es werden vier unabhängige Bereiche auf diese Weise mit der Schneelast belegt. Damit kann eine lokale Anhäufung von Schnee genauso wie ein lokales Abschmelzen betrachtet werden.

	Wind von links	Wind von rechts	Wind auf den vorderen Giebel
linke Wand	0.8	-0.5	-0.5
Dach ohne Kragträger	-0.6	-0.6	-0.6
Kragträger	-0.1	-1.3	-0.1
rechte Wand	-0.5	0.8	-0.5
vorderer Giebel	-0.5	-0.5	0.8
hinterer Giebel	-0.5	-0.5	-0.5

Tabelle 5.4:  $c_P$ -Werte der Hallenteile nach DIN1055

### Statische Windwirkung

Das betrachtete mittlere Hallensegment (Abbildung 5.52) dient der Längsaussteifung der Halle. Zusätzlich zu den anteiligen Windlasten in Richtung der Binderebene müssen somit auch die Windlasten auf die Giebelwände aufgenommen werden. Die Giebel werden für die Festlegung der Windlasten näherungsweise als starre Platten betrachtet, die am Fuß gelenkig gelagert sind. Die auftretenden Horizontalkräfte werden über die Pfetten auf das Hallensegment abgetragen. Die Giebelfläche beträgt  $180 \text{ m}^2$ . Der Standort der Halle soll der Windlastzone I (DIN1055) zugeordnet werden können. Der Norm kann der auf 10 Jahre bezogene Böenstaudruck für das 5-Sekunden-Mittel für 10 m Höhe über Grund entnommen werden. Dieser beträgt  $q_b = 0.6 \text{ kN/m}^2$ . Der Variationskoeffizient soll mit 0.14 angenommen werden. Die Gumbel-Verteilung soll die Verteilung der Extrema des Staudrucks wiedergeben mit dem Mittelwert  $q_b$ . Der Richtungseinfluss des Windes wird vernachlässigt, so dass die Windrichtung über den Kreisumfang als gleichverteilt angenommen wird.

Ist die Zufallsgröße  $X_6$  der Böenstaudruck und  $X_{11}$  der Winkel zwischen Struktur und Windrichtung, so ergibt sich die Kraft, die an einem Strukturknoten angreift, durch

$$F = (a \cos X_{11} + b \sin X_{11}) \cdot X_6$$

Die Faktoren  $a$  und  $b$  berücksichtigen die anteiligen Flächen.

Die Druckbeiwerte  $c_P$  aus Tabelle 5.4 sind von der Geometrie der Bauwerksteile abhängig und stellen nur eine Näherung der wirklichen Strömungsverhältnisse dar, welche selbst von der Windgeschwindigkeit abhängig sind. Man kann allerdings auch davon ausgehen, dass die in der Norm angegebenen Werte auf der sicheren Seite liegen und damit die Versagenswahrscheinlichkeit zu hoch eingeschätzt wird.

Zufallsvariable	stochastische Größe	Verteilung	Mittelwert	Standardabweichung
$X_1 \dots X_4$	Scheehöhe $S$	Extrem I	0.6402 m	0.2250 m
$X_5$	Variation der Schneedichte $V$	log-normal	1	0.2
$X_6$	Windlast (Staudruck)	Extrem I	0.6 kN/m <sup>2</sup>	0.084 kN/m <sup>2</sup>
$X_7$	Steckgrenze	log-normal	392 N/mm <sup>2</sup>	27.4 N/mm <sup>2</sup>
$X_8$	Elastizitätsmodul	log-normal	$2.1 \cdot 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>	$0.126 \cdot 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>
$X_9, X_{10}$	Installationslast	log-normal	0.3 kN/m <sup>2</sup>	0.15 kN/m <sup>2</sup>
$X_{11}$	Windrichtung	gleichverteilt	–	–
$X_{12}$	Eigenlast der Dachhaut	log-normal	0.489 kN/m <sup>2</sup>	0.03 kN/m <sup>2</sup>

Tabelle 5.5: Zufallsvariablen

### 5.4.3 Ergebnisse

In Tabelle 5.5 sind alle verwendeten Zufallsvariablen dargestellt. Es soll angenommen werden, dass zwischen den Zufallsvariablen keine Korrelation besteht. Wie in den ersten beiden Beispielen wurden die einzelnen nichtlinearen Finite-Elemente-Analysen zur Suche der Grenzzustandspunkte auf verschiedene Prozessoren einer SGI Origin 2000 verteilt. Die Abbildung 5.59 zeigt die Konvergenz der Versagenswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit der Anzahl der verwendeten Grenzzustandspunkte  $N$ . Auch in diesem Beispiel konvergiert die Lösung unter Verwendung der Interpolation mit Simplexe nur äußerst langsam. Hinzu kommt, dass durch die relativ hohe Dimensionalität des Problems mit  $n = 12$  Zufallsvariablen die Interpolation der Grenzzustandsfunktion mit Simplexe numerisch sehr aufwendig wird, so dass ab  $N = 1500$  diese Interpolation abgebrochen wurde. Die Interpolationen mit gewichteten Radien und mit Normalen-Ebenen konvergieren sehr rasch, so dass ab  $N = 500$  Stützstellen die Versagenswahrscheinlichkeit relativ gut geschätzt wird. Ab  $N = 1500$  Stützpunkten können für dieses Beispiel mit Hilfe der Interpolation mit Normalen-Ebenen, mit gewichteten Radien sowie mit dem directional sampling sehr genaue Ergebnisse erhalten werden. Allerdings ist der numerische Aufwand der Grenzzustandsfunktionsauswertung mit Hilfe der gewichteten Radien ebenfalls erheblich, so dass auch in diesem Fall auch auf weitere Berechnungen verzichtet wurde.

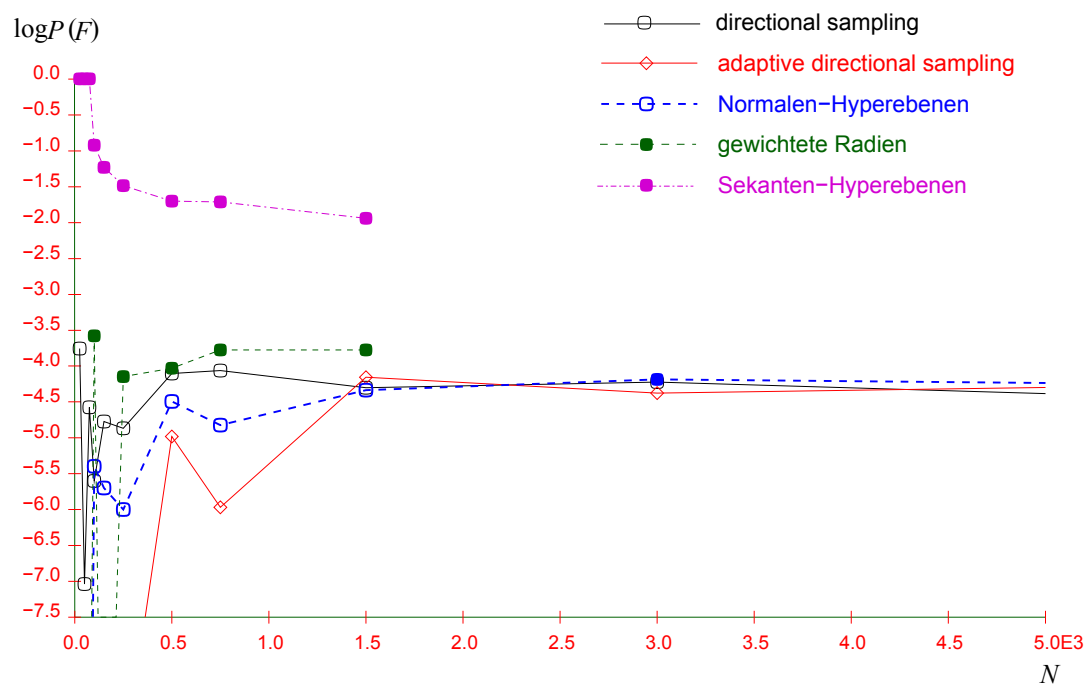


Abbildung 5.59: Konvergenz der Versagenswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der Anzahl der verwendeten Grenzzustandspunkte  $N$ .

## 6

# Zusammenfassung

Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit einer Struktur mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationsmethoden erfordert, dass die Funktion der Strukturantwort implizit berechnet wird, zum Beispiel durch nichtlineare Strukturanalysen für jede Realisation der Zufallsvariablen. Die Strukturanalysen bilden jedoch den Hauptanteil am Berechnungsaufwand der Zuverlässigkeitsanalyse, so dass die Analyse von realistischen Strukturen mit nichtlinearem Verhalten durch die begrenzten Computer-Ressourcen stark eingeschränkt ist.

Die klassischen Antwortflächenverfahren approximieren die Funktion der Strukturantwort oder aber die Grenzzustandsfunktion durch Polynome niedriger Ordnung. Dadurch ist für die Auswertung des Versagenskriteriums nur noch von Interesse, ob eine Realisation der Basisvariablen innerhalb oder außerhalb des von der Antwortflächenfunktion gebildeten Raumes liegt – die Strukturanalyse kann dann entfallen. In diesem Sinne stellt das Antwortflächenverfahren eine Verbindung zwischen den deterministischen Strukturanalysen und den probabilistischen Analysemethoden dar. Problematisch bei der Verwendung der klassischen Antwortflächenverfahren ist, dass eine polynomiale Approximation bei stark nichtlinearen Grenzzustandsfunktionen versagt. Durch die Ermittlung der Koeffizienten mittels Regression werden die eigentlich exakt ermittelten Stützstellen nur näherungsweise interpoliert. Der dabei entstehende Anpassungsfehler kann unter Umständen das Approximationsergebnis unbrauchbar machen. Bei allen Methoden, die dem Antwortflächenverfahren zuzuordnen sind, ist die erforderliche Anzahl an Stützstellen proportional mindestens zum Quadrat der Anzahl der Zufallsvariablen, so dass Aufgabenstellungen mit sehr vielen Zufallsvariablen unter Umständen günstiger mit Hilfe von Monte-Carlo-Methoden gelöst werden können. Das Antwortflächenverfahren ist demnach – genauso wie das directional sampling – sehr gut zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit komplexer nichtlinearer Strukturen mit nur wenigen Zufallsvariablen einsetzbar. Allerdings sind die Antwortflächenverfahren im Gegensatz zum directional samp-

ling darüber hinaus ausgezeichnet für Sensitivitätsstudien geeignet, da, ist die Antwortfläche einmal bekannt, weitere Untersuchungen mit nur sehr geringem zusätzlichen Rechenaufwand durchgeführt werden können.

Das directional sampling neigt bei Problemen mit vielen Zufallsvariablen zu einem systematischen Fehler, da insbesondere für Grenzzustandsflächen niedrigerer Ordnung als die Anzahl der Zufallsvariablen nur wenige Simulationen auf diesen liegen und somit die Versagenswahrscheinlichkeit durch die Kreissegmentapproximation unterschätzt wird. Das adaptive importance directional sampling dagegen beseitigt diesen Fehler, verschenkt jedoch Informationen über den Verlauf der Grenzzustandsfunktion, da die aufgefundenen Stützstellen aus den vorangegangenen Simulationsläufen nicht berücksichtigt werden können. Aus diesem Grund erscheint eine Kombination beider Simulationsverfahren und eine Interpolation mittels einer Antwortfläche geeignet, diese Probleme zu lösen.

Das in der Arbeit entwickelte Verfahren der adaptiven Simulation der Einheitsvektoren und anschließender Interpolation durch Hyperebenen oder durch gewichtete Radian erwies sich als eine robuste Methode zur Berechnung von Versagenswahrscheinlichkeiten. Das vorgestellte Verfahren verbindet die Vorteile des directional sampling, des importance sampling und der Antwortflächenverfahren. Zudem werden die ausgerechneten Grenzzustandspunkte nicht nur durch Polynome näherungsweise approximiert, sondern interpoliert. Allerdings müssen - wie auch beim directional sampling - stets genügend Stichproben auf die Grenzzustandsfunktion hinführen, was bei ausgeprägt konvexen Grenzzustandsfunktionen, die zudem nur in einer Richtung vom Koordinatenursprung aus liegen, eine sehr hohe Anzahl von Startsimulationen erfordert. Weiterhin muss der Ursprung des Standardnormalraumes sich innerhalb des Bereiches befinden, in dem es kein Strukturversagen gibt. Ebenso ist die Berücksichtigung von nicht-zusammenhängenden Versagensbereichen nicht möglich. Vorzugsweise muss die Interpolation mittels der entwickelten Verfahren im Standardnormalraum erfolgen. Es wurde vorausgesetzt, dass das Systemverhalten zeitunabhängig ist und eine mögliche Vorschädigung der Struktur vernachlässigt werden kann.

In dieser Arbeit wurde u.a. die Anwendbarkeit der entwickelten Verfahren zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Strukturen mit geometrisch nichtlinearem Verhalten demonstriert. Dazu wurde ein geometrisch nichtlineares Schalenelement weiterentwickelt. In einer herkömmlichen Formulierung eines lokalen Koordinatensystems in den Finite-Elemente-Knoten treten numerische Schwierigkeiten bei der Stabilitätsanalyse und in geometrisch nichtlinearen Berechnungen auf. Durch eine alternative Festlegung des Koordinatensystems kann das finite Schalenelement auch in derartigen Analysen angewendet werden. Die entstehende Element-Steifigkeitsmatrix ist sowohl auf globale als auch auf lokale Knoten-Freiheitsgrade bezogen. Ein Basiswechsel mit Koordinatentransformation wurde verwendet, damit das vor-

gestellte finite Schalenelement auch in Verbindung mit anderen finiten Elementen benutzt werden kann.

Ein Interpolationsfehler kann durch die Suche weiterer Grenzzustandspunkte in einem nachträglichen Simulationslauf abgeschätzt werden. Anschließend kann der Interpolationsfehler definiert werden als der Schätzer der zusätzlichen Stichproben für den Betrag der Differenzen der bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten in den Grenzzustandspunkten und in den entsprechenden Schnittpunkten der Richtungsvektoren mit der Antwortflächenfunktion. Darüber hinaus kann eine Konvergenzordnung des Interpolationsfehlers in einer gewählten Norm eines Sobolew-Raumes angegeben werden. In hierauf aufbauenden Arbeiten könnte untersucht werden, ob die Berechnung der Konvergenzordnung auch in Bezug auf die Versagenswahrscheinlichkeit selbst erweitert werden könnte.





# Literaturverzeichnis

- ABRAMOWITZ, M. ; STEGUN, I.M.: *Handbook of Mathematical Functions*. New York USA : Dover Publications, 1972
- AHMAD, S. ; IRONS, B.M. ; ZIENKIEWICZ, O.C.: Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2 (1970), S. 419 – 451
- AYYUB, B.M. ; HALDAR, A.: Practical Structural Reliability Techniques. In: *Journal of Structural Engineering, ASCE* 110 (1984), Nr. 8, S. 1707 – 1724
- BATHE, K.-J.: *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996
- BAYER, V.: *Zur Zuverlässigkeitsbeurteilung von Baukonstruktionen unter dynamischen Einwirkungen*. Weimar, Germany : Institut für Strukturmechanik, Bauhaus-Universität, 1999
- BAYER, V. ; BUCHER, C. ; EBERT, M. ; HUTH, O. ; PURKERT, G. ; RIEDEL, J. ; ROOS, D. ; SCHORLING, Y. ; ZABEL, V.: *Slang* - the Structural Language. Version 4.0. Weimar, Germany : Institute of Structural Mechanics - Bauhaus-University Weimar, 2000
- BJERAGER, P.: Probability Integration by Directional Simulation. In: *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 114 (1988), Nr. 8, S. 1285 – 1302
- BOX, G. E. P. ; DRAPER, N. R.: *Empirical Model Building and Response Surfaces*. New York, USA : John Wiley and Sons, 1987
- BREITUNG, K. W.: Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals. In: *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 110 (1984), Nr. 3, S. 357 – 366
- BUCHER, C. ; SCHORLING, Y. ; WALL, W.: *Slang* - the Structural Language, a Tool for Computational Stochastic Structural Analysis. In: STURE, S. (Hrsg.): *Proc. 10th ASCE Eng. Mech. Conf., Boulder, CO, May 21-24, 1995*. New York : ASCE, 1995, S. 1123 – 1126

- BUCHER, C. G.: Adaptive Sampling - An Iterative Fast Monte Carlo Procedure. In: *Structural Safety* 5 (1988), Nr. 2
- BUCHER, C. G. ; BOURGUND, U.: *Efficient Use of Response Surface Methods*. Bericht Nr. 9 : Institut für Mechanik, Universität Innsbruck, Austria, 1987
- BUCHER, C. G. ; BOURGUND, U.: A Fast and Efficient Response Surface Approach for Structural Reliability Problems. In: *Structural Safety* 7 (1990), Nr. 1, S. 57 – 66
- BUCHER, C. G. ; CHEN, Y.-M. ; SCHUËLLER, G. I.: Time Variant Reliability Analysis Utilizing Response Surface Approach. In: THOFT-CHRISTENSEN, P. (Hrsg.): *Proc., 2nd IFIP Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems*. Berlin, Germany : Springer Verlag, 1988, S. 1 – 14
- BUCHER, C. G. ; PRADLWARTER, H. J. ; SCHUËLLER, G. I.: *COSSAN - Ein Beitrag zur Software-Entwicklung für die Zuverlässigkeitsbewertung von Strukturen*. Düsseldorf, Germany : VDI, Bericht zur Zuverlässigkeit von Komponenten Technischer Systeme, 1989
- BUCHER, C. G. ; SCHUËLLER, G. I.: Systems Reliability: Revisited. In: SCHUËLLER, G. I. (Hrsg.) ; SHINOZUKA, M. (Hrsg.) ; YAO, J. T. P. (Hrsg.): *Structural Safety and Reliability*. Rotterdam, Netherlands : Proceedings, ICOSSAR '93, A. A. Balkema, 1994, S. 1227 – 1232
- BURG, K. ; HAF, H. ; WILLE, F.: *Höhere Mathematik für Bauingenieure*. Teubner, 1987
- CHENEY, E. W.: *Introduction to Approximation Theory*. New York, USA : McGraw-Hill, 1966
- CIARLET, P. G. ; RAVIART, P. A.: General Lagrange and Hermite interpolation with applications to finite element method. In: *Arch. Rat. Mech. Anal.* 46 (1972), S. 177 – 199
- CORNELL, C. A.: Probability based structural code. In: *Journal of the Am. Concrete Institute* 66 (1969), S. 974 – 985
- DAVIS, P. J. ; RABINOWITZ, P.: *Methods of Numerical Integration*. London : Academic Press, 1984
- DEÁK, I.: Three Digit Accurate Multiple Normal Probabilities. In: *Numerische Mathematik* (1980), Nr. 35, S. 369 – 380
- DIN1055: *Lastannahmen*. Deutsche Fassung DIN 1055 T1 (7.78). Berlin : Deutsches Institut für Normung e.V.

- DITLEVSEN, O. ; BJERAGER, P.: Plastic Reliability Analysis by Directional Simulation. In: *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 115 (1988), Nr. 6, S. 1347 – 1362
- DITLEVSEN, O. ; BJERAGER, P. ; OLESEN, R. ; HASOFER, A. M.: Directional Simulation in Gaussian Processes. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 3 (1988), Nr. 4, S. 207 – 217
- DITLEVSEN, O. ; MELCHERS, R. E. ; GLUVER, H.: General Multi-Dimensional Probability Integration by Directional Simulation. In: *Computers & Structures* 36 (1990), Nr. 2
- DVORKIN, E. N. ; BATHE, K.-J.: A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis. In: *Engineering Computation* 1 (1984), S. 77 – 88
- EC1: *Grundlagen der Tragwerksplanung und Einwirkungen auf Tragwerke*. Deutsche Fassung DIN ENV 1991-1. Berlin : Deutsches Institut für Normung e.V., 1994
- ENGELUND, S. ; RACKWITZ, R.: Experiences with Experimental Design Schemes for Failure Surface Estimation and Reliability. In: LIN, Y. K. (Hrsg.): *ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability*. New York, USA : Proceedings, 6th ASCE, 1992, S. 244 – 247
- ENGELUND, S. ; RACKWITZ, R.: A benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability. In: *Structural Safety* 12 (1993), S. 255 – 276
- FARAVELLI, L.: *Response Surface Approach for Reliability Analysis*. Pavia, Italy : Pubblicazione n. 160, Dipartimento di Meccanica Strutturale Dell'Università di Pavia, 1986
- GENZ, A.: An adaptive numerical integration algorithm for simplices. In: SHERWANI, N. A. (Hrsg.) ; DONCKER, E. de (Hrsg.) ; KAPENGA, J. A. (Hrsg.): *From Computing in the 90's, Proceedings of the First Great Lakes Computer Science Conference*. New York : Springer Verlag, 1991, S. 279 – 292
- GUAN, X. L. ; MELCHERS, R. E.: *Reliability Analysis using Piece-Wise Limit State Surface*. Tokyo, Japan : APSSRA95, Asian-Pacific Symposium on Structural Reliability and its Applications, November 12-14, 1995
- GUAN, X. L. ; MELCHERS, R. E.: Multitangent-Plane Surface Method for Reliability Calculation. In: *Journal of Engineering Mechanics* 123 (1997), Nr. 10

- HASOFER, A. M. ; LIND, N. C.: Exact and Invariant Second-Moment Code Format. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* 100 (1974)
- HOHENBICHLER, M. ; RACKWITZ, R.: Improvement of Second-Order Reliability Estimates by Importance Sampling. In: *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 114 (1988), Nr. 12, S. 2195 – 2198
- HUEBNER, K. H.: *The Finite Element Method for Engineers*. J. Wiley & Sons, Inc., 1975
- HUGHES, T. J. R. ; LIU, W. K.: Nonlinear Finite Element Analysis of Shells: Part I. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 26 (1980), S. 331 – 362
- HUTCHINSON, J. W. ; KOITER, W. T.: Postbuckling Theory. In: *Appl. Mech. Rev.* 66 (1970), Nr. 1353
- KIJAWATWORAWET, W.: *An Efficient Adaptive Importance Directional Sampling for Nonlinear Reliability Problems*. Innsbruck, Austria : PhD Thesis, Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck, 1991
- KIJAWATWORAWET, W. ; PRADLWARTER, H. J. ; SCHUËLLER, G. I.: Structural reliability estimation by adaptive importance directional sampling. In: SHIRAIISHI, N. (Hrsg.) ; SHINOZUKA, M. (Hrsg.) ; WEN, Y. K. (Hrsg.): *Structural Safety and Reliability*. Balkema, Rotterdam : Proceedings, ICOSSAR '97, 1998, S. 891 – 897
- KLINGMÜLLER, O. ; BOURGUND, U.: *Sicherheit und Risiko im Konstruktiven Ingenieurbau*. Braunschweig, Wiesbaden, Germany : Vieweg, 1992
- LIU, P.-L. ; DER KIUREGHIAN, A.: Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 1 (1986), Nr. 2, S. 105 – 112
- MACKE, M. ; ROOS, D. ; RIEDEL, J.: An Adaptive Response Surface Method Utilizing Error Estimates. In: *8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability PMC2000-068*. 2000
- MYERS, R. H.: *Response Surface Methodology*. Boston, USA : Allyn and Bacon Inc., 1971
- NATAF, A.: Determination des distributions dont les marges sont donnees. In: *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences* (1982), Nr. 225, S. 42 – 43

- OUPORNPRASERT, W.: Adaptive numerical Integration for reliability Analysis I. In: *Universität Innsbruck, Internal Working Report* (1987), Nr. 20, S. 1 – 24
- OUPORNPRASERT, W.: Methods to calculate structural reliabilities. In: *Universität Innsbruck, Internal Working Report* (1988), Nr. 18, S. 1 – 53
- OUPORNPRASERT, W. ; BUCHER, C. G.: An efficient scheme to determine response functions for reliability analyses. In: *Universität Innsbruck, Internal Working Report* (1988), Nr. 30, S. 1 – 39
- PARISCH, H.: A Critical Survey of the 9-Node Degenerated Shell Element with Special Emphasis on Thin Shell Application and Reduced Integration. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 20 (1979), S. 323 – 350
- RACKWITZ, R.: *Response Surfaces in Structural Reliability*. München, Germany : Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Heft 67/1982, Laboratorium für den konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, 1982
- RACKWITZ, R.: *Einwirkungen auf Bauwerke*. Der Ingenieurbau. Berlin : Ernst & Sohn Verlag Berlin, 1997
- RACKWITZ, R. ; FIESSLER, B.: Structural reliability under combined random load sequences. In: *Computers and Structures* 9 (1978), S. 489 – 494
- RAJASHEKHAR, M. R. ; ELLINGWOD, B. R.: A new look at the response surface approach for reliability analysis. In: *Structural Safety* 12 (1993), Nr. 3, S. 205 – 220
- RAMM, E.: *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente*. Habilitationsschrift. Universität Stuttgart, 1976
- ROOS, D. ; BUCHER, C. ; BAYER, V.: Polyhedral response surfaces for structural reliability assessment. In: MELCHERS, R.E. (Hrsg.) ; STEWART, M.G. (Hrsg.): *Proc. International Conference on Applications of Statistics and Probability, 12-15 December 1999*. Sydney, Australia : Balkema/Rotterdam/Brookfield, 1999, S. 109 – 115
- RUBINSTEIN, R. Y.: *Simulation and the Monte Carlo Method*. New York, USA : John Wiley & Sons, 1981
- SCHUÖLLER, G. I. ; BUCHER, C. G. ; PRADLWARTER, H. J.: The Response Surface Method - An Efficient Tool to Determine the Failure Probability of Large Structural Systems. In: *Proc. International Conference on Spacecraft*

- Structures and Mechanical Testing*. Nordwijk, Netherlands, 1991, S. 247 – 251
- SCRATON, R.E.: *Basic Numerical Methods*. London : Edward Arnold, 1984
- SHINOZUKA, M.: Basic Analysis of Structural Safety. In: *Journal of Structural Engineering, ASCE* 109 (1983), Nr. 3, S. 721 – 740
- SPAETHE, G.: *Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen*. Berlin : Verlag für Bauwesen Berlin, 1987
- STROUD, A. M.: *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Englewood Cliffs, New York : Prentice-Hall, 1971
- TVEDT, L.: *Two second-order approximations to the failure probability*. Oslo, Norway : Veritas Report R74-33, Det Norske Veritas, 1983
- VAN DOOREN, P. ; DE RIDDER, L.: An Adaptive Algorithm for Numerical Integration over an n-Dimensional Cube. In: *J. Comp. Appl. Math.* 2 (1976), Nr. 3, S. 207 – 217
- WAARTS, P.H.: *Structural Reliability using Finite Element Methods*. Delft, Netherlands : Delft University Press, 2000
- ZEIDLER, E.: *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis II*. Leizig, Germany : Teubner, 1977
- ZIENKIEWICZ, O. C.: *The Finite Element Method*. 3. McGraw-Hill Book Company, 1967 – 1994
- ZURMÜHL, R. ; FALK, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen*. Springer-Verlag, 1986

# Anhang A

## Dokumentation des Schalenelementes SHELL9N

### A.1 Konzept der isoparametrischen Elementformulierung

Für eine Aufstellung der Element-Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}^{(m)}$  von Finite-Elemente-Modellen mit sogenannten generalisierten Koordinaten werden im Allgemeinen lokale Element-Koordinatensysteme  $x_1, x_2, x_3$  verwendet (Bathe (1996); Huebner (1975); Zienkiewicz (1967 – 1994)). Die Element-Verschiebungen  $u_1(x_i)$ ,  $u_2(x_i)$ ,  $u_3(x_i)$  können dann als Polynome in  $x_i$  mit den unbestimmten generalisierten Koordinaten angenommen werden:

$$\begin{aligned}u_1(x_i) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_3 + \alpha_5 x_1 x_2 + \dots \\u_2(x_i) &= \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 + \beta_4 x_3 + \beta_5 x_1 x_2 + \dots \\u_3(x_i) &= \gamma_1 + \gamma_2 x_1 + \gamma_3 x_2 + \gamma_4 x_3 + \gamma_5 x_1 x_2 + \dots\end{aligned}\tag{A.1}$$

Die Gleichungen (A.1) können in Matrixform als

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Phi} \boldsymbol{\alpha}\tag{A.2}$$

geschrieben werden. Eine mechanische Deutung dieser generalisierten Koordinaten  $\alpha$  ist a priori nicht möglich. Um die generalisierten Koordinaten durch Element-Knotenpunktverschiebungen auszudrücken, wird im Allgemeinen die Koordinatentransformationsmatrix  $\mathbf{A}$  eingeführt. Damit lautet die Gleichung (A.2) speziell für die Element-Knotenpunktverschiebung

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}$$

Falls die Inverse von  $\mathbf{A}$  existiert, ist

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{u}}$$

und

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{u}}$$

Können die Element-Verschiebungen in einem beliebigen Punkt und die Element-Knotenpunktverschiebungen direkt verbunden werden, so ist die Matrix  $\mathbf{A}$  und deren Inversion nun nicht mehr notwendig. Erreicht wird dies in der isoparametrischen Formulierung dadurch, dass die Element-Verschiebungen und die Geometrie in der gleichen Weise interpoliert werden (Bathe (1996); Zienkiewicz (1967 – 1994)); d.h. es gelten die Beziehungen

$$x_i(r_1, r_2, r_3) = \sum_{k=1}^q h_k(r_1, r_2, r_3) x_i^k \quad (\text{A.3})$$

für die Knoteninterpolationen und

$$u_i(r_1, r_2, r_3) = \sum_{k=1}^q h_k(r_1, r_2, r_3) u_i^k \quad (\text{A.4})$$

für die Interpolationen der lokalen Element-Verschiebungen. Dabei sind  $x_i^k$  die Koordinaten und  $u_i^k$  die Knotenverschiebungen der  $q$  Element-Knoten im lokalen Koordinatensystem. Die Interpolationsfunktionen  $h_k$  sind im natürlichen Koordinatensystem  $r_1, r_2, r_3$  definiert. Auf diese Weise können isoparametrische Elemente ohne irgendwelche zusätzliche Schwierigkeiten gekrümmte Ränder haben; ein wesentlicher Vorteil gegenüber der Formulierung mit generalisierten Koordinaten. Die Jacobi-Transformationsmatrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_3}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} & \frac{\partial x_3}{\partial r_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_3} & \frac{\partial x_2}{\partial r_3} & \frac{\partial x_3}{\partial r_3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

lässt sich durch Differentiation der Gleichung (A.3) nach den natürlichen Koordinaten gewinnen. Sofern die Inverse von  $\mathbf{J}$  existiert, erhält man die Element-Verzerrungen in Form von Ableitungen der Gleichung (A.4) nach den lokalen Koordinaten

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \quad (\text{A.6})$$

Mit den Ableitungen der Gleichung (A.6) kann die Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix  $\mathbf{B}$  aufgestellt werden. Ein weiterer Vorteil der isoparametrischen Formulierung ist, dass die lokalen Koordinaten  $x_i$  sowie die lokalen Verschiebungskomponenten  $u_i$  durch die globalen Koordinaten



sowie die globalen Verschiebungskomponenten ersetzt werden können. Somit ist die sonst übliche Transformation der Elementmatrizen in das globale Verschiebungssystem nicht mehr erforderlich. Mit den Ableitungen der Gleichung A.6 kann die Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix  $\mathbf{B}$  aufgestellt werden. Die auf die lokalen Knoten-Freiheitsgrade bezogene Element-Steifigkeitsmatrix lautet dann

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (\text{A.7})$$

Die Inversion der Koordinatenmatrix  $\mathbf{A}$ , deren Dimension  $n$  gleich der Anzahl der Element-Knoten-Freiheitsgrade ist (im Falle des Schalenelementes im Bild 3.5 gilt  $n = 54$ ), wird demnach gewissermaßen durch die Inversion der Jacobi-Matrix der Dimension  $n = 3$  ersetzt. Ein weiterer Vorteil der isoparametrischen Formulierung ist, dass die lokalen Koordinaten  $x, y, z$  sowie die lokalen Verschiebungskomponenten  $u, v, w$  durch die globalen Koordinaten sowie die globalen Verschiebungskomponenten ersetzt werden können. Somit ist die sonst übliche Transformation der Element-Steifigkeitsmatrix (A.7) in das globale Verschiebungssystem nicht mehr erforderlich. Allerdings wird diese Erleichterung bei den isoparametrischen Elementen mit Knoten-Rotationsfreiheitsgraden durch einen entscheidenden Nachteil erkauft, der im Abschnitt A.3 dargestellt und für den im Abschnitt A.4 ein Lösungsvorschlag angegeben werden soll.

## A.2 Verzerrungs-Verschiebungs - Transformationsmatrizen

In einer isoparametrischen Formulierung kann das Schalenelement für eine variable Knotenzahl formuliert werden. Bild 3.5 zeigt ein 9-Knoten-Schalenelement nach Ahmad u. a. (1970); Bathe (1996); Dvorkin und Bathe (1984); Hughes und Liu (1980); Parisch (1979); Ramm (1976). Die Koordinaten eines allgemeinen Punktes im Schalenelement zum Zeitpunkt  $t$  lauten

$${}^t x_i(r_1, r_2, r_3) = \sum_{k=1}^9 h_k(r_1, r_2) {}^t x_i^k + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^9 a_k h_k(r_1, r_2) {}^t V_{ni}^k \quad (\text{A.8})$$

Ein Einsetzen der Gleichung (A.8) in (3.15) und (3.16) liefert die Elementverschiebungen zur Zeit  $t$

$${}^t u_i(r_1, r_2, r_3) = \sum_{k=1}^9 h_k(r_1, r_2) {}^t u_i^k + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^9 a_k h_k(r_1, r_2) ({}^t V_{ni}^k - {}^0 V_{ni}^k) \quad (\text{A.9})$$

und den Elementverschiebungszuwachs

$$u_i(r_1, r_2, r_3) = \sum_{k=1}^9 h_k(r_1, r_2) u_i^k + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^9 a_k h_k(r_1, r_2) V_{ni}^k \quad (\text{A.10})$$

Der Vektor

$$\mathbf{V}_n^k = {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_n^k - {}^t \mathbf{V}_n^k$$

beschreibt den Richtungskosinuszuwachs des auf der Verbindungslinie der Rand- und Eckknoten der Deckflächen liegenden “Normalenvektors”  ${}^t \mathbf{V}_n^k$  infolge der Deformation des Elementes. Für eine Definition von  ${}^t \mathbf{V}_n^k$  auf der Verbindungslinie wären aber die Koordinaten der Knoten der Deckflächen erforderlich. Allerdings lässt sich der Normalenvektor auch durch die Koordinatenlinien der Mittelfläche

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^t x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial^t x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial^t x_3}{\partial r_1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_2^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^t x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial^t x_2}{\partial r_2} & \frac{\partial^t x_3}{\partial r_2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_3^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^t x_1}{\partial r_3} & \frac{\partial^t x_2}{\partial r_3} & \frac{\partial^t x_3}{\partial r_3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und durch die Konstruktion eines lokalen orthonormalen Koordinatensystems

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\bar{r}_1} &= \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3\|_2} \\ \mathbf{e}_{\bar{r}_2} &= \frac{\mathbf{r}_3 \times \bar{\mathbf{r}}_1}{\|\mathbf{r}_3 \times \bar{\mathbf{r}}_1\|_2} \\ \mathbf{e}_{\bar{r}_3} &= \frac{\mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_3\|_2} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

in kartesischen Koordinaten darstellen mit

$${}^t \mathbf{V}_n^k = \mathbf{e}_{\bar{r}_1} \times \mathbf{e}_{\bar{r}_2}$$

Dies hat im Gegensatz zur herkömmlichen Formulierung den Vorteil, dass nur die Knoten der Mittelfläche definiert und verwaltet werden müssen, allerdings den Nachteil, dass sich Elemente, die auf “Gehrung” geschnitten sind, nicht mehr darstellen lassen. Definiert man ein lokales orthonormiertes Koordinatendreiein in den Finite-Elemente-Knoten in globalen kartesischen Koordinaten derart, dass

$${}^t \mathbf{V}_1^k = \frac{\mathbf{e}_{\min} \times {}^t \mathbf{V}_n^k}{\|\mathbf{e}_{\min} \times {}^t \mathbf{V}_n^k\|_2} \quad (\text{A.12})$$

und

$${}^t\mathbf{V}_2^k = {}^t\mathbf{V}_n^k \times {}^t\mathbf{V}_1^k \quad (\text{A.13})$$

ist, können die Komponenten von  $\mathbf{V}_n^k$  durch die Drehungen  $\alpha_k$  bzw.  $\beta_k$  des Normalenvektors  ${}^t\mathbf{V}_n^k$  um die Vektoren  ${}^t\mathbf{V}_1^k$  bzw.  ${}^t\mathbf{V}_2^k$  ausgedrückt werden mit

$$\mathbf{V}_n^k = -{}^t\mathbf{V}_2^k \alpha_k + {}^t\mathbf{V}_1^k \beta_k \quad (\text{A.14})$$

In [Bathe \(1996\)](#) wird für den Bezugsvektor  $\mathbf{e}_{\min}$  einfach ein beliebiger globaler Einheitsvektor (z.B.  $\mathbf{e}_{\min} = \mathbf{e}_{x_1}$ ) verwendet. Dieses Vorgehen verursacht z.B. in einer linearisierten Eigenwertanalyse

$${}^0\mathbf{K}\Phi = \lambda({}^0\mathbf{K} - {}^t\mathbf{K})\Phi$$

dass ggf. der Richtungssinn von  ${}^t\mathbf{V}_1^k$  und  ${}^t\mathbf{V}_2^k$  in Bezug auf  ${}^0\mathbf{V}_1^k$  und  ${}^0\mathbf{V}_2^k$  wechselt, wenn  ${}^0\mathbf{V}_n^k = \mathbf{e}_{x_1}$  ist. Dadurch werden die entsprechenden Zeilen und Spalten in  ${}^0\mathbf{K}$  und  ${}^t\mathbf{K}$  vertauscht und das numerische Ergebniss der Eigenwertanalyse wird unbrauchbar. Besser ist es, für  $\mathbf{e}_{\min}$  den Einheitsvektor  $\mathbf{e}_{x_1}$ ,  $\mathbf{e}_{x_2}$  oder  $\mathbf{e}_{x_3}$  zu wählen, dessen Komponente mit dem Wert “1” mit der kleinsten Komponente von  ${}^t\mathbf{V}_n^k$  übereinstimmt. Darüber hinaus haben Beispielrechnungen gezeigt, dass die Orthonormierung in [\(A.12\)](#) und [\(A.13\)](#) in geometrisch nichtlinearen Analysen auch bei rotationssymmetrischen Systemen und Belastungen Spannungszustände erzeugt, die nicht mehr rotationssymmetrisch sind. Stattdessen ist es zweckmäßiger, das lokale Koordinatensystem in den Finite-Elemente-Knoten mit

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{V}_1^k &= \frac{\mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1\|_2} \\ {}^t\mathbf{V}_2^k &= \frac{\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|_2} \\ {}^t\mathbf{V}_n^k &= \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\|_2} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

festzulegen. Ein Einsetzen der Gleichung [\(A.14\)](#) in die Gleichung [\(A.10\)](#) liefert den Zuwachs der globalen Element-Verschiebungen

$$u_i(r_1, r_2, r_3) = \sum_{k=1}^9 h_k(r_1, r_2) u_i^k + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^9 a_k h_k(r_1, r_2) [-{}^tV_{2i}^k \alpha_k + {}^tV_{1i}^k \beta_k] \quad (\text{A.16})$$

in Abhängigkeit von den inkrementellen globalen Knotenpunktverschiebungen  $u_i^k$  und dem Zuwachs der lokalen Knotenverdrehungen  $\alpha_k$  und  $\beta_k$ . Aus der Beziehung [\(A.16\)](#) kann anschließend mit den Gleichungen [\(A.5\)](#) und [\(A.6\)](#) in der üblichen Art und Weise der Zuwachs der globalen kartesischen Element-Verzerrungskomponenten [\(3.21\)](#) und [\(3.22\)](#) berechnet werden, mit

$${}^0u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial {}^0x_j} = {}^0\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial r_j} \quad (\text{A.17})$$

Außerdem sind die Ableitungen der gesamten Verschiebungen nach den ursprünglichen Koordinaten zu bilden, um den Anfangsverschiebungseffekt in (3.21) mitzuerfassen. Diese Ableitungen erhält man durch Differentiation der Gleichung (A.9), demnach

$${}^t_0 u_{i,j} = \frac{\partial^t u_i}{\partial^0 x_j} = {}^0 \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial^t u_i}{\partial r_j} = \sum_{k=1}^9 {}^0 h_{k,j} {}^t u_i^k + \sum_{k=1}^9 \frac{a_k}{2} (r_3 {}^0 h_{k,j} + {}^0 J_{j3}^{-1} h_k) ({}^t V_{ni}^k - {}^0 V_{ni}^k) \quad (\text{A.18})$$

mit

$${}^0 h_{k,j} = {}^0 J_{j1}^{-1} h_{k,r_1} + {}^0 J_{j2}^{-1} h_{k,r_1}$$

Die daraus ableitbaren Verzerrungs-Verschiebungs-Matrizen  $\mathbf{B}_L$ ,  ${}^t_0 \mathbf{B}_L$ ,  ${}^t_0 \mathbf{B}_{NL}$  können z.B. aus Bathe (1996) entnommen werden.

### A.3 Element-Matrizen

Mit den Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen und den zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen nach (3.33) bzw. (3.41), (3.29) und (3.30) können die Matrizen der Tabelle (3.2) ausgerechnet werden. Allerdings ist die durch die Gleichung (A.7) erhaltene Element-Steifigkeitsmatrix für einen Knoten  $k$

$$\mathbf{K}^k = \begin{bmatrix} F_x(u_k) & F_x(v_k) & F_x(w_k) & F_x(\alpha_k) & F_x(\beta_k) & F_x(\gamma_k) \\ F_y(u_k) & F_y(v_k) & F_y(w_k) & F_y(\alpha_k) & F_y(\beta_k) & F_y(\gamma_k) \\ F_z(u_k) & F_z(v_k) & F_z(w_k) & F_z(\alpha_k) & F_z(\beta_k) & F_z(\gamma_k) \\ M_{V_1}(u_k) & M_{V_1}(v_k) & M_{V_1}(w_k) & M_{V_1}(\alpha_k) & M_{V_1}(\beta_k) & M_{V_1}(\gamma_k) \\ M_{V_2}(u_k) & M_{V_2}(v_k) & M_{V_2}(w_k) & M_{V_2}(\alpha_k) & M_{V_2}(\beta_k) & M_{V_2}(\gamma_k) \\ M_{V_n}(u_k) & M_{V_n}(v_k) & M_{V_n}(w_k) & M_{V_n}(\alpha_k) & M_{V_n}(\beta_k) & M_{V_n}(\gamma_k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

sowohl auf globale als auch auf lokale Knoten-Freiheitsgrade bezogen. Die Submatrizen sollen bezeichnet werden durch

$$\mathbf{K}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{x}}^k(\mathbf{u}^k) & \mathbf{K}_{\mathbf{x}}^k(\alpha^k) \\ \mathbf{K}_{\mathbf{V}^k}^k(\mathbf{u}^k) & \mathbf{K}_{\mathbf{V}^k}^k(\alpha^k) \end{bmatrix}$$

Solange ausschließlich nur ein Finite-Elemente-Typ benutzt wird und eine Zuordnung der Knotenverdrehungen und der Rückstellmomente zu globalen Koordinatenachsen nicht erforderlich wird, ist eine derartige Formulierung vorteilhaft, da sie ohne eine weitere Transformation auskommt; anderenfalls müssen die Submatrizen von  $\mathbf{K}^k$  wie im nachfolgenden Abschnitt beschrieben transformiert werden.

## A.4 Basiswechsel und Koordinatentransformation

Die Vektoren  $\mathbf{V}_1^k, \mathbf{V}_2^k, \mathbf{V}_n^k$  bilden eine lokale Basis im  $\mathbb{R}^3$ . Aus ihnen kann die Basismatrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} V_{1x}^k & V_{2x}^k & V_{nx}^k \\ V_{1y}^k & V_{2y}^k & V_{ny}^k \\ V_{1z}^k & V_{2z}^k & V_{nz}^k \end{bmatrix}$$

gebildet werden. Eine zweite globale orthonormale Basis wird durch die Vektoren  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  mit der Basismatrix

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gebildet. Mit der Übergangsmatrix  $\mathbf{T}$  kann ein Basiswechsel durch

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \mathbf{T} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' \mathbf{T}^{-1} \quad (\text{A.20})$$

beschrieben werden. Jeder beliebige Vektor  $\mathbf{d}$  kann nach [Burg u. a. \(1987\)](#); [Zurmühl und Falk \(1986\)](#) bezüglich der beiden genannten Basen dargestellt werden durch

$$\mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{d}_B \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{d} = \mathbf{B}' \mathbf{d}_{B'} \quad (\text{A.21})$$

wobei  $\mathbf{d}_B$  bzw.  $\mathbf{d}_{B'}$  die den Basen zugeordneten Koordinatenvektoren von  $\mathbf{d}$  bezeichnen; mit

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_B &= \alpha_k \mathbf{V}_1^k + \beta_k \mathbf{V}_2^k + \gamma_k \mathbf{V}_n^k \\ \mathbf{d}_{B'} &= \varphi_x^k \mathbf{e}_x + \varphi_y^k \mathbf{e}_y + \varphi_z^k \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

In diesem Fall beschreibt der Vektor  $\mathbf{d}$  eine allgemeine Drehachse im  $\mathbb{R}^3$ , wie im Bild [A.1](#) dargestellt. Die Koordinatenvektoren in [\(A.22\)](#) lassen sich durch Gleichsetzen der Gleichungen [\(A.21\)](#) ineinander umformen. Dadurch ergibt sich

$$\mathbf{d}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{d}_{B'} \quad (\text{A.23})$$

Aus der Beziehung [\(A.20\)](#) folgt

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}' \quad (\text{A.24})$$

Ein Einsetzen von [\(A.24\)](#) in [\(A.23\)](#) ergibt die Koordinatentransformation

$$\mathbf{d}_B = \mathbf{T} \mathbf{d}_{B'} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{d}_{B'} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{d}_B$$

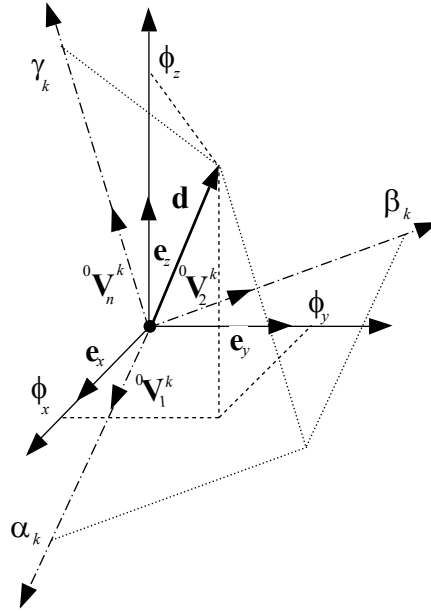


Abbildung A.1: Darstellung einer allgemeinen Drehung in zwei Basen

Da die Basismatrix  $\mathbf{B}'$  der Einheitsmatrix entspricht und die Matrix  $\mathbf{B}$  nach (A.11) bis (A.13) eine orthogonale Matrix darstellt, vereinfacht sich (A.24) zu

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}^T$$

Für die Vektoren der Knotenrotationen und der Knotenmomente in lokalen Koordinaten lässt sich gemäß (A.23) und (A.24)

$$\begin{aligned} \alpha^k &= \mathbf{T}_k \varphi^k \\ \mathbf{M}_{\mathbf{V}^k}^k(\alpha^k) &= \mathbf{T}_k \mathbf{M}_{\mathbf{V}^k}^k(\varphi^k) \\ \mathbf{M}_{\mathbf{V}^k}^k(\mathbf{u}^k) &= \mathbf{T}_k \mathbf{M}_{\mathbf{x}}^k(\mathbf{u}^k) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

für jeden Knoten  $k$  schreiben. Die Knotenkräfte sind entsprechend der Gleichung (A.19) auf kartesische Koordinaten bezogen; also gilt

$$\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^k(\alpha^k) = \mathbf{F}_{\mathbf{x}}^k(\varphi^k) \quad (\text{A.26})$$

Diese Momenten- und Kraft-Vektoren errechnen sich nach (A.19) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{V}^k}^k(\alpha^k) &= \mathbf{K}_{\mathbf{V}^k}^k(\alpha^k) \alpha^k \\ \mathbf{M}_{\mathbf{V}^k}^k(\mathbf{u}^k) &= \mathbf{K}_{\mathbf{V}^k}^k(\mathbf{u}^k) \mathbf{u}^k \\ \mathbf{F}_{\mathbf{x}}^k(\alpha^k) &= \mathbf{K}_{\mathbf{x}}^k(\alpha^k) \alpha^k \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Die Gleichungen (A.25), (A.26) und (A.27) ergeben letztlich die Transformationsbeziehungen

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\mathbf{x}}^k(\varphi^k) &= \mathbf{T}_k^T \mathbf{K}_{\mathbf{V}^k}^k(\alpha^k) \mathbf{T}_k \varphi^k \\ \mathbf{M}_{\mathbf{x}}^k(\mathbf{u}^k) &= \mathbf{T}_k^T \mathbf{K}_{\mathbf{V}^k}^k(\mathbf{u}^k) \mathbf{u}^k \\ \mathbf{F}_{\mathbf{x}}^k(\varphi^k) &= \mathbf{K}_{\mathbf{x}}^k(\alpha^k) \mathbf{T}_k \varphi^k\end{aligned}$$

für die Submatrizen der Element-Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{x}}^k(\mathbf{u}^k) & \mathbf{K}_{\mathbf{x}}^k(\varphi^k) \\ \mathbf{K}_{\varphi^k}^k(\mathbf{u}^k) & \mathbf{K}_{\varphi^k}^k(\varphi^k) \end{bmatrix}$$

für jeden Knoten  $k$  des Schalenelementes.





# Anhang B

## Dokumentation der SLang-Eingabedateien

### B.1 Einleitung

Im Folgenden werden die SLang-Eingabedateien, die für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit der Schalen-Struktur im Abschnitt 5.2.5 erstellt worden sind, zusammengestellt und erläutert. Diese Eingabedateien definieren die statistischen Parameter, steuern den Ablauf der adaptiven Richtungs-suche, interpolieren die Grenzzustandsfläche, berechnen die Versagenswahrscheinlichkeit mittels adaptive sampling und steuern und verteilen die einzelnen Grenzzustandsermittlungen auf einem workstation cluster. Im Einzelnen sind dies:

`Main.s` Haupt-Eingabedatei:

Steuerung des Berechnungsablaufes

Definition aller verwendeter Zufallsvariablen

Adaptive Richtungssuche der Grenzzustandspunkte

Interpolation der Grenzzustandsfläche

Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit

Steuerung und Verteilung der Suche der Grenzzustandspunkte

Definition der veränderlichen Daten im thread file

Zusammenstellung der Grenzzustandspunkte

<code>Shared.s</code>	Definition der statistischen Parameter
<code>parallel.s</code>	Steuerung und Verteilung der unabhängigen Child-Prozesse
<code>hosts.s</code>	Informationen über vorhandene hosts und deren Time-Out-Zeiten
<code>availableHosts.txt</code>	Vektor der hosts bzw. Prozessoren die für die Parallelisierung genutzt werden sollen
<code>threadDirS.s</code>	Berechnung der Grenzzustandspunkte der Schalenstruktur: <ul style="list-style-type: none"> <li>Steuerung des Berechnungsablaufes</li> <li>Schleife über die zu berechnenden Grenzzustandspunkte</li> <li>Inkrementell-iterative Berechnung</li> </ul>

Die verwendeten Kommandos entsprechen der `SLang`-Version 4.0. Für die Kommandos, die im Folgendem nicht erläutert sind, sei auf die `SLang`-Dokumentation ([Bayer u. a. \(2000\)](#)) hingewiesen.

## B.2 Haupt-Eingabedatei (`Main.s`)

### B.2.1 Steuerung des Berechnungsablaufes

```
#macro Thread threadDirS.s
#include parallel.s
#include hosts.s
#include Shared.s
```

```
control gosub, , PrepareParameters, /
```

—— Sprung zur subroutine `PrepareParameters` für die Definition der statistischen Parameter.

```
control gosub,, AdaptiveSearch, /
```

—— Sprung zur subroutine `AdaptiveSearch` für die adaptive Richtungssuche der Grenzzustandspunkte.

```
control gosub,, RSM, /
```

—— Sprung zur subroutine **RSM** für die Interpolation der Grenzzustandsfläche. Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit.

## B.2.2 Definition aller verwendeter Zufallsvariablen

```
#label PrepareParameters
  int_defdoc      numVar    3
  realvec_defdoc  means     numVar
                    2.8e7 2e7 0.5
  realvec_defdoc  sigmas    numVar
                    3e6 1e6 0.005
```

—— Für die 3 zufälligen Parameter  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  werden die Mittelwerte  $E[X_1] = 2.8 \cdot 10^7$  N/m<sup>2</sup>,  $E[X_2] = 2 \cdot 10^7$  N/m<sup>2</sup> und  $E[X_3] = 0.5$  m und Standardabweichungen  $\sigma_{X_1} = 3 \cdot 10^6$  N/m<sup>2</sup>,  $\sigma_{X_2} = 1 \cdot 10^6$  N/m<sup>2</sup> und  $\sigma_{X_3} = 0.005$  m definiert. Die **Slang**-Makro-Definitionen **int\_defdoc** und **realvec\_defdoc** sind weiter unten erläutert.

```
  int_defdoc      numSim     150
  int_defdoc      PartSize   10
```

—— Insgesamt sollen pro Berechnungslauf  $N = 150$  Grenzzustandspunkte gesucht werden. Dabei soll jeder thread 10 Grenzzustandspunkte berechnen.

```
  object create, , , nSimulations /
  object read,, nSimulations 5000 ,/
```

—— Für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mittels adaptive sampling werde pro Simulation  $N = 5000$  Stichproben verwendet.

```
  object create, , , iPartsReturnedInline /
  object create, replace real matrix, 0 numVar, AllPoints /
  control gosub, , PrepareRanset, /
```

—— Sprung zur subroutine **PrepareRanset** für die Definition aller verwendeter Zufallsvariablen.

```
control return,,,/
```

### B.2.3 Adaptive Richtungssuche der Grenzzustandspunkte

Die folgenden Kommandos führen die adaptive Richtungssuche der Grenzzustandspunkte durch:

```
#label AdaptiveSearch
```

```
  object create, replace, ,thePart /
```

```
  ranset simulate, compiler replace unit_vectors,
           numSim RV_set2, Directions /
```

—— Simulation der ersten  $N = 150$  Einheitsvektoren

$\mathbf{a}_i^{(1)}$ .

```
  object copy, replace, Directions, points /
  object initialize, , points 0, /
  control gosub, , CalcAllSimulations, /
```

—— Sprung zur subroutine `CalcAllSimulations` für die Suche der ersten Grenzzustandspunkte  $g_i^{(1)}(\mathbf{x})$ .

```
  object append, add_rows, AllPoints points,/
```

—— Die gefundenen Grenzzustandspunkte `points` werden in das `SLang`-Objekt `AllPoints` geschrieben.

```
  linalg transpose, replace, points, points_trans /
  ranset transform, replace to_gauss, points_trans RV_set1,
           GaussPoints/
```

—— Die Grenzzustandspunkte  $g_i^{(1)}(\mathbf{x})$  im Raum der gegebenen Zufallsvariablen  $\mathbf{X}$  werden mittels Nataf-Transformation in den Raum standardnormalverteilter Zufallsvariablen transformiert. In dem `SLang`-Objekt `GaussPoints` sind die daraus resultierenden  $g_i^{(1)}(r_i^*(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i) = 0$  abgespeichert.

```
  linalg transpose, replace, GaussPoints, GaussPoints_trans /
  ranset adapt,, RV_set_adapt GaussPoints_trans weights ,/
```

—— Die Adaption der Simulationsdichte wird entsprechend der Beziehungen (2.17) und (2.18) durchgeführt.

```

    ranset simulate, compiler replace unit_vectors,
        numSim RV_set_adapt, Directions /
    ——— Simulation der zweiten  $N = 150$  Einheitsvektoren  $\mathbf{a}_i^{(2)}$ .

```

```

    object create, replace, , iPartsReturnedInline /
    control gosub, , CalcAllSimulations, /
    ——— Sprung zur subroutine CalcAllSimulations für
    die Suche der zweiten Grenzzustandspunkte  $g_i^{(2)}(\mathbf{x})$ .

```

```

    object append, add_rows, AllPoints points,/
    ——— Die gefundenen Grenzzustandspunkte points werden
    an das Stang-Objekt AllPoints angefügt.
    Die adaptive Suche der Grenzzustandspunkte kann im Allgemeinen an dieser
    Stelle abgebrochen werden.
    control return,,/

```

## B.2.4 Interpolation der Grenzzustandspunkte und Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit

```

#label RSM
    ranset allocate, replace, 2, /
    group allocate, replace, 2, /
    group create, ranvars, 1 3 1 2 3, RV_group /
    ranset create, original, 1 RV_group, RV_set /
    ——— Definition der Zufallsvariablen  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$ .

```

```

    ranvar copy, replace, 1, 4 /
    ranvar copy, replace, 2, 5 /
    ranvar copy, replace, 3, 6 /
    group create, ranvars, 2 3 4 5 6, RV_group_adaptive1 /
    ranset create,, 2 RV_group_adaptive1, RV_sampling /
    ranset modify, gauss, RV_sampling,/
    ranset modify, enlarge, RV_sampling 3,/
    ——— Definition der Zufallsvariablen für das adaptive
    sampling. Für den ersten Simulationslauf wird eine Simulationsdichte verwendet,
    die eine um den Faktor 3 größere Standardabweichung besitzt als die Verteilung
    der Zufallsvariablen.

```

```
resurf allocate, replace, 1,/
resurf create, orig_points usertolerance userbound ,
          1 1 0.01 8 AllPoints,/
```

—— Definition einer Antwortflächenfunktion unter Nutzung der in `AllPoints` gespeicherten Grenzzustandspunkte. Das Interpolationsverfahren ist noch nicht festgelegt.

### Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit dem adaptive sampling:

```
object create, , ,iAdapt/
#label AdaptiveSampling
  object modify, add, iAdapt 1,/
  ranset isampling, replace,
          nSimulations RV_set RV_sampling,
          samples weights/
```

—— Importance sampling zur Simulation von  $N = 5000$  Realisationen der Zufallsvariablen. Im ersten Lauf sind die Originalvariablen `RV_set` und die Simulationsvariablen `RV_sampling` identisch. Das Objekt `samples` enthält die Realisationen der Zufallsvariablen und `weights` enthält die Gewichte, d.h. die Verhältnisse der Original- zur Simulationsdichte nach Gleichung (2.8).

```
resurf indicate, normal_space WEIGHTED_RADII
          replace weights,
          1 samples weights, new_weights/
```

—— Interpolation der Grenzzustandspunkte, z.B. mittels gewichteter Radien im Raum standardnormalverteilter Zufallsvariablen, und Berechnung der Indikatorfunktion  $I(\tilde{g}(\mathbf{x}))$ .

```
ranset adapt, , RV_sampling samples new_weights,/
```

—— Die Adaption der Simulationsdichte wird entsprechend der Beziehungen (2.17) und (2.18) durchgeführt.

```
control if, integer less, iAdapt 4 AdaptiveSampling,/
object delete,, iAdapt,/
regress failure, replace, new_weights, pf std/
```

—— Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit und der Standardabweichung entsprechend Gleichung (2.8) und (2.9).

```
output print,, pf,/
output print,, std,/
control return,,/
```

### B.2.5 Subroutine für die Verteilung der Suche der Grenzzustandspunkte

```
#label CalcAllSimulations
control gosub, , PrepareParallel,/
```

—— Sprung zur subroutine `PrepareParallel` (siehe Abschnitt B.4) für die Vorbereitung der Verteilung der Suche der Grenzzustandspunkte.

```
object info, first_dim, Directions, nParts /
object copy, replace real, nParts, tmp /
object operate, \div, tmp PartSize, /
object copy, replace integer, tmp, nParts /
object modify, add, nParts \int \neq 0 \sub tmp nParts, /
```

—— Die insgesamt  $N = 150$  Grenzzustandspunkte in Richtung `Directions` sollen in 15 threads (`nParts`) berechnet werden.

#### Schleife über alle threads:

```
object copy, , iPartsReturnedInline, iPart /
#label nextThread
object modify, add, iPart 1, /
object copy, replace, iPart, thePart /
object modify, subtract, iPart 1, /
#label StartHereIfTimeoutOccured
```

—— Sprungmarke, zu der das Programm springt, wenn ein thread die vorherbestimmte Berechnungszeit überschreitet. Dies kann z.B. bei einem Ausfall oder Überlastung eines Prozessors der Fall sein. Die nicht gerechneten 10 Richtungen werden dann an einen noch freien thread weitergegeben.

```

object modify, add, iPart 1, /
object read, , bTimeoutOccured FALSE, /
control gosub, , StartThread, /

```

—— Sprung zur subroutine `StartThread` (siehe Abschnitt [B.4](#)) um einen neuen thread zu starten.

```

control if, equal, bTimeoutOccured TRUE HandleTimeout, /
control gosub, , checkForReturnedThreads, /

```

—— Sprung zur subroutine `checkForReturnedThreads` (siehe Abschnitt [B.4](#)) zur Kontrolle, ob ein thread beendet worden ist.

```

control if, equal, bTimeoutOccured TRUE HandleTimeout, /
control if, less, iPart nParts nextThread, /
control gosub, , EndParallel,/

```

—— Wenn alle threads verteilt worden sind, wird zur subroutine `EndParallel` (siehe Abschnitt [B.4](#)) gesprungen und solange gewartet, bis alle threads beendet worden sind.

```

control if, equal, bTimeoutOccured TRUE HandleTimeout, /
object delete, , bTimeoutOccured, /
object delete, , nParts, /
object delete, , iPart, /
object delete, , thePart, /
control return,,/

```

## B.2.6 Subroutine zur Definition der veränderlichen Daten im thread file

Dem jeweiligen thread werden die simulierten Einheitsvektoren mitgeteilt. Dies erfolgt durch Abspeicherung der Vektoren im thread file.

```

#label TransmitToThread
object create, , , BeginPart /
object modify, , BeginPart \int \add 1 \mul PartSize
               \sub thePart 1, /
object copy, , numSim, nRest /
object modify, subtract, nRest \int \sub BeginPart 1, /
object combine, \min, nRest PartSize, size /
object extract, part, Directions BeginPart 1 size numVar,

```



```

                                PartDirections /
    output file, text append, PartDirections, szThreadFile /
    object delete, , PartDirections, /
    object delete, , BeginPart, /
    object delete, , nRest, /
    object delete, , size, /
control return,,/

```

### B.2.7 Subroutine zur Zusammenstellung der Grenzzustandspunkte

Die in der subroutine CalcPartOfSimulations (siehe Abschnitt [B.7](#)) pro thread berechneten Grenzzustandspunkte werden in der folgenden subroutine zusammengestellt:

```

#label OnThreadReturned
    GetThread_thePart theThread theReturnedPart
    input file, replace text, szThreadFile, PartPoints      /
    object create, replace, , BeginPart /
    object modify, ,
        BeginPart \int \add 1 \mul PartSize \sub
        theReturnedPart 1, /
    object assemble, part, PartPoints Points BeginPart 1, /
    object modify, , iPartsReturnedInline
        \int \mul theReturnedPart \eql iThread 1, /
    control if, not gosub, iPartsReturnedInline 0 SaveState, /
    object delete, , BeginPart, /
control return,,/

```

Einige `Siang`-Makro-Definitionen zur Erzeugung und Dokumentation von skalaren und vektoriellen Variablen:

```

* Integer definition and documentation /
#macro int_defdoc <    string append, replace, 1 $s, szTemp /
                    object create, , , szTemp /
                    object modify, , szTemp $d, /
    output file, append text, szTemp, OutFileTxt / >

* Real definition and documentation /
#macro real_defdoc <    string append, replace, 1 $s, szTemp /
                    object create, real, , szTemp /
                    object modify, , szTemp $g, /
    output file, append text, szTemp, OutFileTxt / >

```

```
* Real definition and documentation /
#macro realvec_defdoc <      string append, replace, 1 $s,
                           szTemp /
                           object create, real vector , $s, szTemp /
                           object read, , szTemp $| $g $\, /
output file, append text, szTemp, OutFileTxt / >
```

## B.3 Definition der Zufallsvariablen (Shared.s)

Dieses `SLang` include file definiert die Zufallsvariablen und die Anzahl der pro thread zu berechnenden Grenzzustandspunkte. Eingebunden ist `Shared.s` in `threadDirS.s` und in `Main.s`.

```
#macro OutFileTxt "Result.txt"
#macro OutFileBin "Result.bin"

#label PrepareRanset
control gosub, , ReadParamFromFile, /
```

—— Die in der Datei `Result.txt` abgelegten statistischen Parameter der Zufallsvariablen  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  und die Anzahl der pro thread zu berechnenden Grenzzustandspunkte werden in dieser subroutine ausgelesen.

```
ranvar allocate, replace, \int \mul 4 numVar, /
ranset allocate, replace, 4, /
group allocate, replace, 4, /

ranvar create, normal,      1 means(1) sigmas(1), RV1/
ranvar create, normal,      2 means(2) sigmas(2), RV2/
ranvar create, normal,      3 means(3) sigmas(3), RV3/

group create,  ranvars, 1 numVar 1 2 3, RV_group1 /
ranset create, original, 1 RV_group1, RV_set1 /
```

—— Definition der Originalvariablen.

```
ranvar create, normal, 4 0 1 ,/
ranvar create, normal, 5 0 1 ,/
ranvar create, normal, 6 0 1 ,/

group create,  ranvars, 2 numVar 4 5 6, RV_group2 /
ranset create, , 2 RV_group2, RV_set2 /
```

—— Definition der Simulationsvariablen.

```

ranvar create, normal, 7 0 1 ,/
ranvar create, normal, 8 0 1 ,/
ranvar create, normal, 9 0 1 ,/

group create,  ranvars, 3 numVar 7 8 9, RV_group_adapt /
ranset create, , 3 RV_group_adapt, RV_set_adapt /

```

—— Definition der Simulationsvariablen für die Adaption der Simulationsdichte.

```

control return,,,/

#label ReadParamFromFile
    input file, text, OutFileTxt, numVar /
    input file, text, OutFileTxt, PartSize /
    input file, text, OutFileTxt, means /
    input file, text, OutFileTxt, sigmas /
control return,,,/

```

## B.4 Verteilung (parallel.s)

Die `Slang`-Datei `parallel.s` wurde von J. Riedel am Institut für Strukturmechanik entwickelt. Sie enthält alle notwendigen Funktionen, um vollständig unabhängige Child-Prozesse auf einem Netzwerk oder einem Multiprozessor-Computer zu verteilen. Ebenfalls anwendbar ist die Verteilung in heterogenen Netzwerken, wenn remote jobs automatisch absetzbar sind. Die Verteilungsfunktionalität verfügt über einige Sicherheitsmechanismen. So werden “verloren gegangene” Child-Prozesse automatisch neu gestartet. Außerdem erfolgt ein Lastausgleich in dem Netzwerk oder dem Multiprozessor-Computer.

```

#macro TRUE 1
#macro FALSE 0

```

Die folgende subroutine bereitet die Verteilung der einzelnen threads vor. In der Datei `availableHosts.txt` (siehe Abschnitt [B.6](#)) wird nach freien hosts bzw. nach freien Prozessoren gesucht und eine Startzeit vergeben.

```

#label PrepareParallel
control echo, off,,/
    group allocate, replace, 4, /
    group create, nodes, 1 0, AvailHosts /

```

```

group create, nodes, 2 0, TimeoutThreads /
group create, nodes, 3 0, FreeThreads /
group create, nodes, 4 0, UsedThreads /
input file, text, "availableHosts.txt", AvailableHosts /
object info, first_dim, AvailableHosts, nHosts /
object extract, maximum, AvailableHosts, maxHosts
        dummyHosts /
node allocate, replace, maxHosts, /
object create, real vector, maxHosts, StartingTime /

object create, , , theThread /
object create, , , iThread /
#label nextPossibleThread
    object modify, add, iThread 1, /
    object extract, replace row, AvailableHosts iThread,
        theThread /
    node create, , theThread 0 0 0, /
    group modify, append, AvailHosts theThread, /
    group modify, append, FreeThreads theThread, /
control if, less, iThread nHosts nextPossibleThread, /

object delete, , maxHosts, /
object delete, , dummyHosts, /
object delete, , nHosts, /

object create, , , actualTime /
control time, , , StartTime /
object copy, , StartingTime, RunningTime /
object create, , , bTimeoutOccured /
object create, , , nThread /
object create, , , tmpFreeThreads /
object create, , , tmpUsedThreads /
object create, , , nUsedThreads /
control return,,/

```

Die subroutine `StartThread` startet ein thread. In diesem Fall wird ein SLang child process gestartet mit:

```
./slang -b threadDirS.s&
```

Die Variable `Thread` wurde in der Datei `Main.s` definiert als:

```
#macro Thread threadDirS.s
```

```
#label StartThread
    * searching a free Thread /

```

```

group extract, replace, FreeThreads, tmpFreeThreads /
object info, replace first_dim, tmpFreeThreads, tmp /
object copy, , thePart, saveThePart /
control if, equal gosub, tmp 0 WaitForThreads, /
object copy, replace, saveThePart, thePart /
object delete, , saveThePart, /
control if, equal, bTimeoutOccured TRUE TimeoutOccured3, /

* ThreadsAvailableNow /
object extract, replace row, tmpFreeThreads 1, theThread /
GetThreadInfo theThread

* Write File for transmitting data /
string append, , 2 "rm -f " szThreadFile, szDeleteFile /
control system, , szDeleteFile, /
string delete, , szDeleteFile, /
output file, text, theThread, "toThread.t" /
SetThread_thePart theThread thePart
output file, text append, thePart, "toThread.t" /
control gosub, , TransmitToThread, /
control system,, "chmod a-x toThread.t", /

* starting theThread /
string append, replace, 3 "./slang -b " Thread "&",
                szStartThread /
control system, , szStartThread, /
string delete, , szStartThread, /
control gosub,, WaitTillThreadIsAccepted, /
#label TimeoutOccured3
control return,,/

```

Die subroutine EndParallel wartet solange, bis alle threads beendet worden sind. Anschließend werden nicht mehr benötigte Variablen gelöscht.

```

#label EndParallel
control gosub, , WaitForTheLastThread, /
control if, equal, bTimeoutOccured TRUE TimeoutOccured4, /
object delete, , actualTime, /
object delete, , StartTime, /
object delete, , StartingTime, /
object delete, , RunningTime, /
object delete, , iThread, /
object delete, , nThread, /
object delete, , theThread, /

```

```

    object delete, , tmpFreeThreads, /
    object delete, , tmpUsedThreads, /
    object delete, , AvailableHosts, /
    object delete, , nUsedThreads, /
    control echo, off,,/
    #label TimeoutOccured4
control return,,/

#label WaitForThreads
    control gsub, , checkForReturnedThreads, /
    control if, equal, bTimeoutOccured TRUE TimeoutOccured5, /
        group extract, replace, FreeThreads, tmpFreeThreads /
        object info, replace first_dim, tmpFreeThreads, tmp /
        control if, not, tmp 0 ThreadsAvailableNow, /
            control delay, , 1,/
    control if, equal, 0 0 WaitForThreads, /
    #label TimeoutOccured5
    #label ThreadsAvailableNow
control return,,/

#label WaitForTheLastThread
    control gsub, , checkForReturnedThreads, /
    control if, equal, bTimeoutOccured TRUE TimeoutOccured1, /
        group extract, replace, UsedThreads, tmpUsedThreads /
        object info, replace first_dim, tmpUsedThreads,
            nUsedThreads /
        control if, equal, nUsedThreads 0 LastThreadReturned, /
            control delay, , 1,/
    control if, equal, 0 0 WaitForTheLastThread, /
    #label TimeoutOccured1
    #label LastThreadReturned
control return,,/

#label WaitTillThreadIsAccepted
    group modify, delete, FreeThreads theThread, /
    group modify, append, UsedThreads theThread, /
    control time, replace, , actualTime /
    object modify, , StartingTime theThread actualTime(2), /

#label ThreadNotYetAccepted
    string append, replace, 1 "test -x toThread.t",
        sxTest /
    control system, soft_fail, sxTest, exist /

```

```

        string delete, , sxTest, /
        control if, equal, exist 0 ThreadIsAccepted, /
            object modify, , bTimeoutOccured
                \int \gtn RunningTime(theThread) 10,/
            control if, equal, bTimeoutOccured TRUE
                TimeoutOccured6, /
            control gosub, , CalcRunningTime, /
        control if, equal, 0 0 ThreadNotYetAccepted, /

#label ThreadIsAccepted
control time, replace, , actualTime /
object modify, , StartingTime theThread actualTime(2), /

string convert, real_string replace no_space,
                actualTime(2), szTmp /
string append, replace, 3 szThread " accepted at " szTmp,
                szTmp /
output print, string, szTmp, /
output file, text append plain string, szTmp,
                "protocol.txt" /
#label TimeoutOccured6
control return,,/

```

Die folgende subroutine HandleTimeout ermittelt "verloren gegangene" Child-Prozesse.

```

#label HandleTimeout
    object modify, subtract, iPart 1, /
    GetThreadInfo theThread
    GetThread_thePart theThread thePart

    * write event to protocol.txt and timeout.txt /
    string convert, replace no_space, thePart, szTmp /
    string append, replace, 2 "Timeout occurred: thePart "
                        szTmp, szOut /
    string append, replace, 3 szOut " Host "    szHost, szOut /
    string append, replace, 3 szOut " Thread " szThread,
                        szOut /
    control time, replace, , tmp /
    string convert, replace real_string no_space, tmp 2,
                        szTmp /
    string append, replace, 3 szOut " actual Time" szTmp,
                        szOut /
    control system, , "date >> protocol.txt" , /

```

```

output file, text append plain string, szOut,
    "protocol.txt" /
control system, , "date >> timeout.txt" , /
output file, text append plain string, szOut,
    "timeout.txt" /
string delete, , szOut, /

* don't observe this thread anymore /
group modify, delete, UsedThreads theThread, /
group modify, append, TimeoutThreads theThread, /
object modify, , StartingTime theThread 0, /
* make host invalid for the future /
group modify, delete, AvailHosts theThread, /
group extract, replace, AvailHosts, AvailableHosts /
output file, text, AvailableHosts, "availableHosts.txt" /
control if, equal, 0 0 StartHereIfTimeoutOccured, /

```

Die folgende subroutine `checkForReturnedThreads` untersucht unter Nutzung von `UsedThreadReturned` ob die Laufzeit einiger Child-Prozesse beendet ist.

```

#label checkForReturnedThreads
    control gosub, , CalcRunningTime, /

    group extract, replace, UsedThreads, tmpUsedThreads /
    object info, replace first_dim, tmpUsedThreads, nThread /

    * sort tmpUsedThreads for the greatest thePart value /
    object create, replace vector, 0, tmp /
    control if, equal, nThread 0 EndCheckForReturnedThreads, /
    object create, replace, , iThread /
    #label nextUsedThread1
        object modify, add, iThread 1, /
        object extract, replace row, tmpUsedThreads iThread,
            theThread /
        GetThread_thePart theThread thePart
        object append, add_rows, tmp thePart, /
    control if, less, iThread nThread nextUsedThread1, /
    object append, add_columns, tmpUsedThreads tmp, /
    object sort, ascending column, tmpUsedThreads 2, /
    object extract, replace column, tmpUsedThreads 1, tmp /
    object copy, replace vector, tmp, tmpUsedThreads /

    object create, replace, , iThread /

```



```

#label nextUsedThread2
    object modify, add, iThread 1, /
    object extract, replace row, tmpUsedThreads iThread,
        theThread /
    GetThreadInfo theThread
    string append, , 2 "test -x " szThreadFile ,
        szTestIfReturned /
    control system, soft_fail, szTestIfReturned, exist /
    string delete, , szTestIfReturned, /
    control if, equal, exist 0 UsedThreadReturned, /
    object modify, , bTimeoutOccured
        \int \gtm RunningTime(theThread) Timeout,/
    control if, equal, bTimeoutOccured TRUE
        TimeoutOccured2, /
    control if, less, iThread nThread nextUsedThread2, /
    #label EndCheckForReturnedThreads
    #label TimeoutOccured2
control return,,/

#label UsedThreadReturned
    GetThread_thePart theThread theReturnedPart

    * write event to protocol.txt /
    control system, , "date >> protocol.txt" , /
    string convert, replace int_string no_space,
        theReturnedPart, szTmp /
    string append, replace, 2 szTmp " returned ", szTmp /
    input file, replace text, szThreadFile, Time /
    string convert, replace real_string no_space, Time,
        szTime /
    string append, replace, 4 szTmp " Time: " szTime " sec",
        szTmp /
    string delete, , szTime, /
    string append, replace, 2 szTmp " >> protocol.txt",
        szTmp /
    output file, text append plain string, szTmp,
        "protocol.txt" /
    output print, string, szTmp, /

    control gosub, , OnThreadReturned, /

    * free Thread /
    group modify, delete, UsedThreads theThread, /

```

```

group modify, append, FreeThreads theThread, /
object modify, , StartingTime theThread 0, /
string append, , 2 "rm -f " szThreadFile, szDeleteFile /
control system, , szDeleteFile, /
string delete, , szDeleteFile, /
control if, equal, 0 0 EndCheckForReturnedThreads, /

#label CalcRunningTime
* add actualTime to StartingTime vector for
  freeThreads(StartingTime = 0) /
object copy, replace, StartingTime, tmp /
object operate, \neq, tmp 0, /
control time, replace, , actualTime /
* the time to observe the MidnightSwitch has to
  be less the time
  to WaitTillThreadIsAccepted, otherwise incorrect
  timeout occurse /
control if, less gosub, \int actualTime(2) 9
                                MidnightSwitch, /
object operate, \mul, tmp actualTime(2), /
object combine, replace \sub, tmp StartingTime,
                                RunningTime /
control return,,,/

#label MidnightSwitch
  object operate, \neq, StartingTime 0, /
control return,,,/

```

## B.5 Informationen über vorhandene hosts und deren Time-Out-Zeiten (hosts.s)

In dieser Datei werden alle hosts bzw. Prozessoren aufgelistet, die für die Berechnung der einzelnen threads benutzt werden sollen. Für jeden host bzw. Prozessor kann eine bestimmte Time-Out-Zeit vergeben werden.

```

#macro GetThreadInfo
<
  object copy, , $s, theThread2 /
  string convert, replace no_space, theThread2, szTmp /
  object delete, , theThread2, /
  string append, , 2 "GetThread" szTmp, theLabel /

```

```

        control if, equal gosub, 0 0 theLabel, /

>

#macro TimeForOnePart < 5000 >

#label GetThread1
    ThreadDef host host1 TimeForOnePart
#label GetThread2
    ThreadDef host host2 TimeForOnePart
...
#label GetThread20
    ThreadDef host host20 TimeForOnePart
#label GetThreadEnd
    string delete, , theLabel, /
control return,,,/

#macro ThreadDef
<
    string create, replace, 10, szHost /
    string read, , szHost $s, /
    string create, replace, 10, szThread /
    string read, , szThread $s, /
    string append, replace, 2 szThread ".t", szThreadFile /
    object create, replace, , Timeout /
    object read, , Timeout $s, /

    control if, equal goto, 0 0 GetThreadEnd, /
>

#macro GetThread_thePart
<
    GetThreadInfo $s
    string append, replace, 2 szThread "_thePart", szTmp /
    object copy, replace, szTmp, $s /
>

#macro SetThread_thePart
<
    GetThreadInfo $s
    string append, replace, 2 szThread "_thePart", szTmp /
    object create, replace, , szTmp /
    object read, , szTmp $s, /

```

&gt;

## B.6 Vektor der Hosts bzw. Prozessoren die für die Parallelisierung angesprochen werden sollen (availableHosts.txt)

```
Object: AVAILABLEHOSTS
```

```
Object info: 1 2 15 1
```

```
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
```

## B.7 Berechnung der Grenzzustandspunkte der Schalenstruktur

Die Datei `threadDirS.s` beinhaltet alle Funktionen zur Berechnung der Grenzzustände der Schalenstruktur. Dabei wird der Grenzzustand der Struktur entsprechend der Gleichung (3.43) ermittelt. Die Lasten werden dazu vom Erwartungswert der Basisvariablen ausgehend inkrementell so lange gesteigert (vgl. dazu Abschnitt 3.4.1), bis ein Versagen der Struktur eingetreten ist, d.h. bis die Systemsteifigkeitsmatrix singulär ist (siehe Abschnitt 3.4.3).

### B.7.1 Steuerung des Berechnungsablaufes

```
control echo, off, , /
control time, , , startTime /
object create, , , theThread /
```

```

object read, , theThread -1, /
input file, replace text, "toThread.t", theThread /
GetThreadInfo theThread
input file, text, szThreadFile, PartDirections /

```

—— Einlesen der Richtungsvektoren PartDirections.

```

string append, replace,
    3 "echo;hostname;echo starting " szThread ";echo;",
    szTmp /
control system,, szTmp,/
control system,, "chmod a+x toThread.t", /

```

—— Bestätigung des Berechnungsanfanges.

```

control gosub, , PrepareRanset, /

```

—— Sprung zur subroutine PrepareRanset für die Definition aller verwendeter Zufallsvariablen.

```

control gosub, , CalcPartOfSimulations, /

```

—— Sprung zur subroutine CalcPartOfSimulations zur Berechnung der Grenzzustandspunkte.

```

output file, text append, PartPoints, szThreadFile /

```

—— Abspeichern der berechneten Grenzzustandspunkte.

```

control time, , , endTime /
object combine, replace \sub, endTime startTime, tmp /
object extract, row, tmp 2, Time /
output file, text append, Time, szThreadFile /
string append, replace, 2 "chmod a+x " szThreadFile, checkout /
control system,, checkout, /
control quit,,/

```

—— Mitteilung, dass dieser Child-Prozess beendet ist.

```

#include hosts.s
#include Shared.s

```

### B.7.2 Schleife über die zu berechnenden Grenzzustandspunkte

```
#label CalcPartOfSimulations
  control gosub, , PrepareStructure, /
```

—— Sprung zur subroutine `PrepareStructure` zur Definition des Finite-Elemente-Modelles, zur Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes der Struktur im Erwartungswert der Zufallsvariablen.

```
object info, first_dim, PartDirections, nPartSim /
object info, replace second_dim, PartDirections, tmp /
object create, real matrix, 0 tmp, PartPoints /
object create, replace, , iteration_steps /
object read, , iteration_steps 8, /
```

—— Festlegung der maximal zulässigen Iterationsanzahl. Wenn diese überschritten wird, muss das Lastinkrement halbiert werden.

```
resurf allocate, replace, 1,/
resurf create, directions userbound usertolerance,
  1 RV_set1 0.01 8 PartDirections, /
```

—— Übergabe der Richtungs-Einheitsvektoren **a** (`PartDirections`) und Festlegung der Genauigkeitsschranke  $\epsilon = 0.01$  der Gleichung (3.45). Um gegebenenfalls die Rechenzeit zu verringern soll, die Suche immer dann abgebrochen werden, wenn nach einer Länge von  $r = 8$  eines Richtungsvektors im Raum der standard-normalverteilten Zufallsvariablen noch kein Versagen der Struktur eingetreten war. Der Einfluss der bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten der Gleichung (2.14) auf die Versagenswahrscheinlichkeit nach Beziehung (2.13) ist dann vernachlässigbar.

**Schleife über die Grenzzustandspunkte, die in einem thread zu berechnen sind:**

```
object create, replace,, iSim /
#label SimLoop
  object modify, add, iSim 1 , /
  control gosub, , SEARCH, /
```

—— Sprung zur subroutine **SEARCH** zur Berechnung eines Grenzzustandspunktes.

```
linalg transpose, replace, factors, tmp /
object append, add_rows, PartPoints tmp, /
```

—— Abspeichern des gefundenen Grenzzustandspunktes.

```
control if, integer less goto, iSim nPartSim SimLoop,/
object delete,, iSim,/
object delete,, nPartSim,/
control return,,/
```

### Subroutine zur Berechnung eines Grenzzustandspunktes:

```
#label SEARCH
object create, , , failure /
```

—— Fehlervariable zu Null setzen.

```
structure initialize,,/
node merge,, disp_mean,/
element update, total,,/
```

—— Spannungs- und Verformungszustand der Struktur im Erwartungswert der Zufallsvariablen aufbringen.

Die folgende subroutine ermittelt den Grenzzustand der Struktur entsprechend der Gleichung (3.43). Die Lasten werden inkrementell so lange gesteigert (vgl. dazu Abschnitt 3.4.1), bis ein Versagen der Struktur eingetreten ist, d.h. bis die Systemsteifigkeitsmatrix singulär ist (siehe Abschnitt 3.4.3).

```
#label search_loop
control if, real equal gosub, failure 0 save_state, /
```

—— Sprung zur subroutine **save\_state** zum Speichern des letzten Verschiebungszustandes **save\_disp**, der noch nicht zum Versagen der Struktur geführt hat.

```
resurf build, replace , 1 failure, factors status /
```

—— Realisierung des Vektors (**factors**) der Basisvariablen  $\mathbf{x}^j$  der Gleichung (3.44). Die Variable **status** gibt an, ob die Genauigkeitsschranke  $\epsilon = 0.01$  der Gleichung (3.45) unterschritten ist oder ob gegebenenfalls der Richtungsvektor eine Länge von  $r = 8$  im Raum der standard-normalverteilten Zufallsvariablen überschritten hat.

```
control if, equal, status 1 LimitStatePointFound, /
```

—— Ein Grenzzustandspunkt ist gefunden, wenn die Variable **status** den Wert 1 besitzt. In diesem Fall wird zur subroutine **LimitStatePointFound** gesprungen und die subroutine **SEARCH** beendet.

```
object create, real vector replace, 1, physical_data/  
object read, , physical_data factors (3) ,/  
element modify, physical_data total, physical_data, /
```

—— Zuweisen der veränderten Schalendicke  $X_3$ .

```
linalg lincomb, replace,  
2 glob_h factors (1) glob_v factors (2), glob_1/
```

—— Bildung des Lastvektors  $\mathbf{x}^j \mathbf{R}$  in Abhängigkeit der veränderten Lasten  $X_1$  und  $X_2$ .

```
object initialize, , failure 0, /  
control gosub, , iterate_static, /
```

—— Sprung zur subroutine **iterate\_static**, die die Newton-Raphson-Iteration der Gleichung (3.43) durchführt.

```
control if, integer equal, status 0 search_loop, /
```

```
#label LimitStatePointFound  
structure initialize, , /  
node merge, , disp_mean, /  
element update, total, , /  
object delete, , failure, /
```

—— Spannungs- und Verformungszustand der Struktur im Erwartungswert der Zufallsvariablen aufbringen.



```
control return,,,/
```

```
#label save_state
```

```
node extract, replace total displacements, , save_disp/
```

```
control return,,,/
```

### Subroutine der Newton-Raphson-Iteration:

```
#label iterate_static
```

```
object create, replace, , iteration_count/
```

```
element build, res_force total GET_FAILURE,,
```

```
dummy failure_runge_kutta/
```

—— Berechnung von  $\mathbf{x}_0^j \mathbf{F}$  entsprechend der Tabelle

3.2. Das Materialverhalten der Struktur wurde als elastisch-plastisch mit einer von-Mises-Fließbedingung ohne Verfestigung angenommen. Im Abschnitt 3.2.5 wurde darauf hingewiesen, dass das aktuelle Lastinkrement zu verringern ist, wenn die Abweichung der Spannungsdeviatoren in der Gleichung (3.42) zu groß werden. Ist dies der Fall, ergibt sich der Wert von `failure_runge_kutta` zu 1.

```
control if, equal, failure_runge_kutta 1 failure_newton,/
```

—— Sprung zur subroutine `failure_newton`, falls der Wert von `failure_runge_kutta` gleich 1 ist.

```
global vector, res_force, , resforce/
```

—— Berechnung von  $\mathbf{x}^j \mathbf{F}$  der Gleichung (3.43).

```
linalg lincomb, ,2 glob_1 1 resforce -1, force_diff/
```

—— Berechnung von  $\mathbf{x}^j \mathbf{R} - \mathbf{x}^j \mathbf{F}$  der Gleichung (3.43).

```
linalg norm, replace, glob_1, compare_norm/
```

—— Berechnung von  $\|\mathbf{x}^j \mathbf{R} - \mathbf{x}^j \mathbf{F}\|$  der Gleichung (3.48).

```
object modify, set, compare_norm \max 1e-15 \mul
compare_norm 1,/
```

**Programmschleife der Newton-Raphson-Iteration:**

```
#label newton_static
  object modify, add, iteration_count 1,/
```

—— Setzen von  $i = 1, 2, \dots$

```
  control if, integer equal, iteration_count
    iteration_steps failure_newton ,/
```

—— Sprung zur subroutine `failure_newton`, falls der Wert von `iteration_count` den eingestellten Wert von `failure_steps` von 8 überschreitet.

```
  element build, stiffness total GET_FAILURE, ,
    dummy failure_runge_kutta/
```

—— Bildung der Element-Steifigkeitsmatrizen des Abschnittes A.3. Das Materialverhalten der Struktur wurde als elastisch-plastisch mit einer von-Mises-Fließbedingung ohne Verfestigung angenommen. Im Abschnitt 3.2.5 wurde darauf hingewiesen, dass das aktuelle Lastinkrement zu verringern ist, wenn die Abweichung der Spannungsdeviatoren in der Gleichung (3.42) zu groß werden. Ist dies der Fall ergibt sich der Wert von `failure_runge_kutta` zu 1.

```
  control if, equal, failure_runge_kutta 1 failure_newton,/
```

—— Sprung zur subroutine `failure_newton`, falls der Wert von `failure_runge_kutta` gleich 1 ist.

```
global matrix, stiffness , , glob_k/
```

—— Berechnung von  $\mathbf{x}^j \mathbf{K}^{(i-1)}$  der Gleichung (3.43).

```
compact factorize, replace GET_SINGULAR, glob_k,
  sky_k singular/
```

——  $\mathbf{LDL}^T$ -Zerlegung der tangentialen Steifigkeitsmatrix `glob_k`. Sollte mindestens ein Pivot-Element innerhalb der Dreieckszerlegung kleiner oder gleich Null werden, dann ist die Steifigkeitsmatrix singulär (siehe Abschnitt 3.4.3). Ist dies der Fall, ergibt sich der Wert von `singular` zu 1.

```
control if, equal, singular 1 failure_newton,/
```

—— Sprung zur subroutine `failure_newton`, falls der Wert von `singular` gleich 1 ist.

```
compact solve, replace, sky_k force_diff , disp_diff/
```

—— Berechnen des Verschiebungsincrementes  $\Delta \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{x}^j \mathbf{K}^{(i-1)^{-1}} (\mathbf{x}^j \mathbf{R} - \mathbf{x}^j \mathbf{F}^{(i-1)})$

```
node extract, replace,, old_disp/
```

```
linalg lincomb, ,2 disp_diff 1 old_disp 1, new_disp/
```

```
node merge, doflist displacements, new_disp,/
```

—— Berechnen und Zuweisen des Verschiebungsvektors  $\mathbf{new\_disp} \mathbf{x}^j \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{x}^{(j-1)} \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^{(i)}$

```
element build, total res_force GET_FAILURE,,  
dummy failure_runge_kutta/
```

—— Berechnung von  $\mathbf{x}_0^j \mathbf{F}^{(i)}$  entsprechend der Tabelle 3.2. Das Materialverhalten der Struktur wurde als elastisch-plastisch mit einer von-Mises-Fließbedingung ohne Verfestigung angenommen. Im Abschnitt 3.2.5 wurde darauf hingewiesen, dass das aktuelle Lastinkrement zu verringern ist, wenn die Abweichung der Spannungsdeviatoren in der Gleichung (3.42) zu groß werden. Ist dies der Fall, ergibt sich der Wert von `failure_runge_kutta` zu 1.

```
control if, equal, failure_runge_kutta 1  
failure_newton,/
```

—— Sprung zur subroutine `failure_newton`, falls der Wert von `failure_runge_kutta` gleich 1 ist.

```
global vector, res_force replace,, resforce/
```

—— Berechnung von  $\mathbf{x}^j \mathbf{F}^{(i)}$  der Gleichung (3.43).

```
linalg lincomb, replace, 2 glob_1 1 resforce -1 ,  
force_diff/
```

—— Berechnung von  $\mathbf{x}^j \mathbf{R} - \mathbf{x}^j \mathbf{F}^{(i)}$  der Gleichung (3.43).

```
linalg norm, replace, force_diff, diff_norm/
```

(3.48). —— Berechnung von  $\|\mathbf{x}^j \mathbf{R} - \mathbf{x}^j \mathbf{F}^{(i)}\|$  der Gleichung

```
object operate, \div, diff_norm compare_norm,/
control if, real less, 1e-3 diff_norm newton_static,/
```

—— Berechnung und Überprüfung des Konvergenzkriteriums (3.48).

```
compact iteigenstsy, skyline usertolerance replace,
glob_k sky_k 2 1e-5, value omega/
```

—— Berechnung der beiden kleinsten Eigenwerte (vgl. Gleichung (3.52)).

```
control if, real less, value(1) 0 failure_newton,/
control if, real less, value(2) 0 failure_newton,/
```

—— Sprung zur subroutine `failure_newton`, falls ein Eigenwert kleiner als Null ist.

```
element update, total GET_FAILURE,, failure_runge_kutta/
```

—— Aktualisieren des Spannungs- und Verzerrungszustandes im Gleichgewichtszustand. Das Materialverhalten der Struktur wurde als elastisch-plastisch mit einer von-Mises-Fließbedingung ohne Verfestigung angenommen. Im Abschnitt 3.2.5 wurde darauf hingewiesen, dass das aktuelle Lastinkrement zu verringern ist, wenn die Abweichung der Spannungsdeviatoren in der Gleichung (3.42) zu groß werden. Ist dies der Fall, ergibt sich der Wert von `failure_runge_kutta` zu 1.

```
control if, equal, failure_runge_kutta 1 failure_newton,/
```

—— Sprung zur subroutine `failure_newton`, falls der Wert von `failure_runge_kutta` gleich 1 ist.

```
control return,,,/
```

```
#label failure_newton
  object modify, set, failure 1,/
  node merge, total displacements, save_disp,/
```

—— Der letzte Verschiebungszustand `save_disp`, der noch nicht zum Versagen der Struktur geführt hat, wird der Struktur wieder zugewiesen und die Funktion `iterate_static` beendet. Der Programmablauf wird anschließend in der übergeordneten Funktion `search_loop` fortgesetzt.

```
control return,,,/
```

### B.7.3 Inkrementell-iterative Berechnung bis zum Mittelwertvektor der Basisvariablen

```
#label PrepareStructure
  #include schale.s
```

—— Einlesen des Finite-Elemente-Modells der Schalenstruktur (vgl. Abbildung 5.24) mit Lagerungsbedingungen und Einheits-Einzellasten.

```
object create, , , load_steps /
object read, , load_steps 20, /
```

—— Festlegung der Anzahl der Lastinkremente.

```
object create, , , iteration_steps /
object read, , iteration_steps 20, /
```

—— Festlegung der maximal zulässigen Iterationsanzahl.

```
object create, real vector replace, 1, physical_data/
object read, , physical_data means (3) ,/
element modify, physical_data total, physical_data,/
```

—— Zuweisen des Erwartungswertes der Schalendicke mit  $E[X_3] = 0.5$  m.

```
element build, stiffness total,,/
```

—— Bildung der Element-Steifigkeitsmatrizen des Abschnittes [A.3](#).

```
global restraints, remove_rot_singular,,/
```

—— Setzen der vorgesehenen Lagerungsbedingungen und Sperren des Rotations-Freiheitsgrades in Richtung der Schalennormale für alle Knoten der Struktur.

```
global vector, load, 1 1 1, glob_h/
global vector, load, 1 2 1, glob_v/
linalg lincomb,replace,
    2 glob_h means (1) glob_v means (2), glob_lmean/
```

—— Bildung des Lastvektors in Abhängigkeit der Mittelwerte der Lasten  $E[X_1] = 2.8 \cdot 10^7$  N und  $E[X_2] = 2 \cdot 10^7$  N.

```
object create, , , step_counter /
#label increment_iterate_static
    object modify, add, step_counter 1,/
    object copy, , glob_lmean, glob_l /
    object operate, \div, glob_l load_steps, /
    object operate, \mul, glob_l step_counter, /
```

—— Inkrementelle Laststeigerung von  $t+\Delta t$   $\mathbf{R}$ .

```
control gosub, , iterate_static,/
```

—— Sprung zur subroutine `iterate_static`, die die Newton-Raphson-Iteration der Gleichung [\(3.31\)](#) durchführt.

```
object delete, , glob_l, /
control if, integer less,
    step_counter load_steps increment_iterate_static,/
object delete, , step_counter, /
```

—— Inkrementell-iterative Berechnung bis zum Mittelwertvektor der Basisvariablen entsprechend der Gleichung [\(3.46\)](#).

```
node extract, doflist,, disp_mean /  
node extract, total replace, , save_disp /
```

—— Abspeichern des Verschiebungszustandes im Mittelwert der Zufallsvariablen.

```
control return,,/
```